

Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Schalentragwerke

Simon Nikolaus Kern

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig**

Bericht Nr. 2020-126



Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Schalentragswerke

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Simon Nikolaus Kern
geboren am 22. Oktober 1986
aus Illertissen

Eingereicht am: 11.09.2019

Disputation am: 13.12.2019

Berichterstatter/in: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler
Prof. Dr.-Ing. Peter Horst

Prüfer/in: Prof. Dr. Laura De Lorenzis

2020

ISBN 978-3-926031-27-3

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2020

*Niemand, der seine Arbeit tatsächlich versteht,
würde sich einen Experten nennen.*

- HENRY FORD

Kurzfassung

Ausgesteifte Schalentragsysteme ermöglichen einen effizienten Lastabtrag und finden in vielen Bereichen des Ingenieurwesens Anwendung. Infolge ihrer ausgeprägten Imperfektionsempfindlichkeit ist eine Betrachtung von Beulversagen für eine wirtschaftliche Bemessung unverzichtbar. Die Finite Elemente Methode bietet die Möglichkeit eine mit Anordnung von aussteifenden Elementen zunehmende Komplexität des Tragverhaltens zu berücksichtigen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Einfluss von Aussteifungen auf das Stabilitätsverhalten von Schalentragsystemen zu untersuchen und deren Berücksichtigung durch die Bemessungsverfahren technischer Regelwerke, welchen eine Vielzahl vereinfachender Annahmen zugrunde liegen, zu bewerten. Dies erfolgt durch die Identifikation von ungünstigsten nicht anfänglichen Störungen unter Anwendung des Störenergiekonzeptes.

Das für das Beulversagen wesentliche geometrisch nichtlineare Tragverhalten ist über eine 3-Parameter-Schalentheorie abgebildet. Diese beinhaltet eine gleichwertige Approximation der Grundgleichungen und ist zur Beschreibung der im Bauwesen auftretenden moderaten Rotationen als ausreichend genau anzusehen. Für eine Modellierung verzweigter Strukturen sind Schalenelemente, welche auf einer gemischt-hybriden Formulierung des elastischen Potentials basieren, besonders geeignet, da die Abbildung diskontinuierlicher Spannungsverläufe sowie die Kopplung von Rotationsfreiheitsgraden direkt möglich ist. Darüber hinaus wird durch die Verwendung von Ansatzfunktionen, welche auf die Grundgleichungen abgestimmt sind, eine Verbesserung des Elementverhaltens hinsichtlich verschiedener Versteifungseffekte erzielt. Unterschiedliche Elementvarianten sind mit Bezug auf die gegebene Problemstellung diskutiert. Die Übertragung des in Kombination mit gemischten Elementen vielfach angewandten Störenergiekonzeptes auf die gemischt-hybride Formulierung, ist aufgrund der Ähnlichkeit beider Elementvarianten ohne Modifikation des grundlegenden Vorgehens möglich. Besonderheiten, welche sich aus der Lösung des für die gemischt-hybride Formulierung charakteristischen quadratischen Eigenwertproblems ergeben, sind dargestellt.

Untersuchungen an ausgesteiften Zylinderschalen zeigen, dass die Grenzlaster bei einer Bemessung auf Grundlage von Normverfahren teilweise sehr konservativ ermittelt werden, wodurch ein unwirtschaftlicher Entwurf wahrscheinlich ist. Das Störenergiekonzept ermöglicht die Definition von Beulkriterien, welche das reale Beulverhalten zutreffender abbilden. Des Weiteren erfolgt durch die Identifikation ungünstigster Störungen eine Bewertung des qualitativen Einflusses aussteifender Elemente auf die Imperfektionsempfindlichkeit der Gesamtstruktur. Unterschiedliche Effekte, welche das Beulverhalten beeinflussen, sind anhand von Parameterstudien untersucht.

Abstract

Stiffened shells provide an efficient load transfer and are used in many fields of engineering. Due to their distinct imperfection sensitivity, buckling has to be acknowledged in order to allow an economical design. The finite element method provides the possibility to consider the growth of complexity in load bearing behaviour due to an application of stiffeners. It is the aim of this study to evaluate the influence of stiffeners on the stability of shell structures and their application to design rules which are based on a great amount of simplifications. This is carried out by the identification of unfavourable non-initial perturbations using the perturbation energy concept.

The geometrically non-linear structural behaviour, which is essential for stability analysis, is described by a 3-parameter shell theory. This includes an equivalent approximation of basic equations and is sufficient to describe moderate rotations, which occur in civil engineering practice. Shell elements which are based on a mixed-hybrid formulation of the elastic potential are well suited for modelling branched structures since the mapping of stress discontinuities as well as the coupling of rotational degrees of freedom is possible. Furthermore, an improved element behaviour regarding several locking effects is achieved by the usage of balanced shape functions. Different element variations are discussed with respect to the specified needs. Due to the similarity between mixed and mixed-hybrid elements the transfer of the perturbation energy concept, which is well investigated for mixed elements, is possible without major modifications. Particularities for the mixed-hybrid formulation, which arise from a quadratic eigenvalue problem, are pointed out.

Investigations for stiffened cylindrical shells show that limit loads given by design recommendations may be very conservative which leads to an uneconomical design. The perturbation energy concept enables the definition of buckling criteria which describe the real buckling behaviour more precisely. Furthermore, the qualitative influence of stiffeners on the imperfection sensitivity of the full structure is analysed by the identification of critical perturbations. Various effects which affect the buckling behaviour are examined using parametric studies.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

1	Einleitung	1
2	Berechnungsmodell	6
2.1	Eine 1. Approximation der Schalentheorie	7
2.1.1	Metrik der Schalenmittelfläche	8
2.1.2	Kinematik	9
2.1.3	Werkstoffgleichungen	12
2.1.4	Gleichgewicht	13
2.1.5	Schnittgrößen und Schalenrand	13
2.2	Gemischt-hybrides Weggrößenmodell	14
2.3	Ansatzfunktionen	18
2.3.1	Approximation der Weggrößen	19
2.3.2	Approximation der Membrankräfte	20
2.3.3	Approximation der Momente	22
2.4	Transformation der Freiheitsgrade	25
2.5	Inkrementelle Formulierung und Diskretisierung	27
2.6	Statische Kondensation	29
2.7	Elementeigenschaften	30
2.7.1	Membrantragverhalten ebener Elemente	30
2.7.2	Biegetragverhalten ebener Elemente	37
2.7.3	Gekrümmte Elemente	41
3	Störenergiekonzept	49
3.1	Gemischte Formulierung	51
3.2	Gemischt-hybride Formulierung	54
3.3	Weggrößenformulierung	55
3.4	Grund- und Störenergie	56
3.5	Lösung der Eigenwertprobleme	57
3.6	Verifikation der gemischt-hybriden Formulierung	62
4	Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Zylinderschalen	65
4.1	Normung	67
4.2	Einflussfaktoren	75
4.2.1	Diskretisierung der Schalenmantelfläche	76
4.2.2	Diskretisierung der Steifen	77
4.2.3	Berechnungsausschnitt	80
4.2.4	Startvektor für die Eigenwertiteration	83
4.3	Normierung der Störenergie	85

4.4	Längsversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung	89
4.4.1	Einfluss des Aussteifungsgrades	90
4.4.2	Einfluss der Randbedingungen	93
4.4.3	Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis	95
4.4.4	Interaktion von Beulmoden	100
4.4.5	Exzentrizitätseffekt	110
4.5	Ringversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung	112
4.5.1	Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis	113
4.5.2	Einfluss des Aussteifungsgrades	116
4.6	Zylinderschale mit versteifter Mantelflächenöffnung	118
4.6.1	Einfluss der Aussteifung auf das Tragverhalten	118
4.6.2	Grenzlasten nach DIN EN 1993-1-6 und Störenergiekonzept . . .	124

5 Zusammenfassung und Ausblick **130**

Literaturverzeichnis **i**

Nomenklatur

Indizes

Griechischer Index	$\in [1,2]$
Lateinischer Index	$\in [1,2,3]$

Allgemein

x^i	Kartesische Koordinaten des \mathbb{R}^3
Θ^α, Θ^3	Krummlinige Koordinaten der Schalenmittelfläche
ξ^1, ξ^2	Lokale Elementkoordinaten
$\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2$	Lokale Elementkoordinaten nach YUAN et al. [84]
ξ^{1*}, ξ^{2*}	Lokale Elementkoordinaten nach SZE und CHOW [67]
δ_α^λ	Kronecker-Delta
dA	Differentielles Flächenelement
ds	Differentielles Linienelement

Skalare

Π	Elastisches Potential
Π_{st}	Störenergie
π_{st}	Bezogene Störenergie
B^*	Modifizierte Biegesteifigkeit zur Normierung der Störenergie
λ	Eigenwert / Bezogene Schlankheit
T	Beulwellenlänge nach linearer Biegetheorie
E	E-Modul
ν	Querdehnzahl
k_{Ele}	Elementierungsgrad der Mantelfläche
$k_{Ele,st}$	Elementierungsgrad der Steifen
n_{Fhg}	Anzahl Freiwerte
n_σ	Anzahl Spannungsfreiwerte
n_u	Anzahl Verschiebefreiwerte
n_r	Anzahl Starrkörpermoden
\hat{u} / \hat{w}_ν	Weggrößenfreiwerte
\hat{n} / \hat{m}	Kraftgrößenfreiwerte
k_s	Koiter-Parameter
$f_{y,k}$	Charakteristischer Wert der Fließspannung

Vektoren / Tensoren

Hochgestellter Index	Kontravariante Größe
Tiefgestellter Index	Kovariante Größe
$()^*$	Asymmetrischer Tensor

\mathbf{r}	Ortsvektor
$\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_3$	Basisvektoren der Schalenmittelfläche
\mathbf{e}_i	Basisvektoren des \mathbb{R}^3
\mathbf{g}_i	Basisvektoren des Schalenkontinuums
\mathbf{v}	Verschiebungsvektor des Schalenkontinuums
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche
\mathbf{w}	Verschiebungsvektor bei $\Theta^3 = 1$
$\boldsymbol{\omega}$	Verdrehungsvektor
\mathbf{n}	Normalkraftvektor
\mathbf{m}	Momentenvektor
\mathbf{q}	Querkraftvektor
\mathbf{z}	Zustandsgrößen der gemischten Formulierung
\mathbf{p}	Lastvektor
\mathbf{p}_{st}	Störlast
$\mathbf{r}_u / \mathbf{r}_s$	Residuum
$\boldsymbol{\nu}$	Normalenvektor
$\boldsymbol{\tau}$	Tangentialvektor
Φ	Eigenvektor
$a_{\alpha\beta}$	Metriktenor
$b_{\alpha\beta}$	Krümmungstensor
S^{ij}	Zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
γ_{ij}	Green-Lagrange-Verzerrungstensor
$\alpha_{\alpha\beta}$	In Θ^3 konstante Anteile von γ_{ij}
$\beta_{\alpha\beta}$	In Θ^3 lineare Anteile von γ_{ij}
$\rho_{\alpha\beta}$	In Θ^3 quadratische Anteile von γ_{ij}
$\sigma^{\alpha\beta}$	Spannungstensor
$n^{\alpha\beta}$	Normalkrafttensor
$m^{\alpha\beta}$	Momententensor
$E^{\alpha\beta\rho\lambda}$	Elastizitätstensor
$D^{\alpha\beta\rho\lambda}$	Dehnsteifigkeitstensor
$B^{\alpha\beta\rho\lambda}$	Biegesteifigkeitstensor
$F_{\alpha\beta\rho\lambda}^D / F_{\alpha\beta\rho\lambda}^B$	Nachgiebigkeitstensoren
μ_α^λ	Schalenshifter

Matrizen

$\mathbf{A} = \mathbf{A}^L + \mathbf{A}^{NL}$	Gemischte Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{uu} / \mathbf{K}_{us} / \mathbf{K}_{su} / \mathbf{K}_{ss}$	Untermatrizen von \mathbf{A}
$\mathbf{K}_0 / \mathbf{K}_1 / \mathbf{K}_2$	Gemischt-hybride Steifigkeitsmatrizen
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix

Zylinderschalen

r	Krümmungsradius
ℓ	Zylinderlänge
t	Dicke der Schalenmantelfläche
r/t	Schlankheit
$\bar{\sigma}$	In Meridianrichtung wirkende Belastung
σ_{cr} / p_{cr}	Grenzlast für ein definiertes Niveau der bezogenen Störenergie
σ_{ki} / p_{ki}	Beullast aus nichtlinearer Eigenwertanalyse
σ_{cl} / p_{cl}	Analytische Beullast axial gestauchter Zylinderschalen nach TIMOSHENKO [70]
$\hat{\sigma}^{22}$	In Ringrichtung gemittelte Meridianspannung
$\sigma_{x,Rcr} / n_{x,Rcr}$	Ideale Beullast nach Norm
α_x	Elastischer Beulabminderungsfaktor für axial gestauchte Zylinderschalen
λ_p	Teilplastische Grenzschlankheit
λ_0	Vollplastische Grenzschlankheit
Q	Herstellqualitätsparameter

Ausgesteifte Zylinderschalen

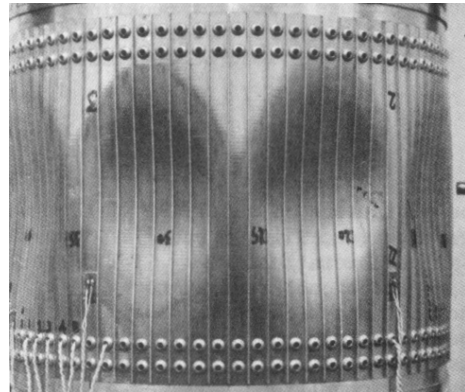
t_{st}	Steifendicke
t_m	Fiktive Dicke der Schalenmantelfläche bei flächengleich verschmierten Steifen
h_{st}	Steifenhöhe
b_{st}	Steifenabstand
A_{st}	Querschnittsfläche einer Steife
I_{st}	Flächenträgheitsmoment einer Steife um die starke Achse
\bar{A}_{st}	Bezogene Steifenfläche (Aussteifungsgrad) $A_{st}/(b_{st}t)$
\bar{I}_{st}	Bezogenes Flächenträgheitsmoment $I_{st}/(b_{st}t^3)$
n_{st}	Steifenanzahl
ϑ	Winkel zwischen Längssteifen
\bar{b}_{st}	Anzahl der Beulhalbwellen nach linearer Biegetheorie in einem Schalensegment
b_e	Effektive Breite
r/t_m	Verschmierte Schlankheit
p_{cl}^*	Beullast nach der Theorie verschmierter Steifen [7]
α_{glob}	Elastischer Beulabminderungsfaktor für global beulende axial gestauchte Zylinderschalen

1 Einleitung

Schalentragwerke weisen unter Druckbeanspruchungen eine ausgeprägte Imperfektionsempfindlichkeit auf. Dennoch finden sie aufgrund eines effizienten Lastabtrages in weiten Bereichen des Ingenieurwesens Anwendung und sind deshalb seit Jahrzehnten Gegenstand von interdisziplinären Forschungsvorhaben. Infolge des komplexen Tragverhaltens und unvermeidbaren Imperfektionen realer Strukturen werden teilweise extreme Abweichungen zwischen theoretischen und experimentellen Beullasten beobachtet. Um eine Bemessung beulgefährdeter Schalen dennoch zu ermöglichen, wurden neben Theorien zur Beschreibung des Tragverhaltens idealer Strukturen auch Normkonzepte entwickelt, welche den Einfluss von Imperfektionen auf Grundlage empirischer Untersuchungen berücksichtigen. Diese finden noch heute in unterschiedlichen Bereichen des Ingenieurwesens Anwendung und sind Bestandteil gültiger technischer Regelwerke, s. [12], [18], [37], [77].



(a) Schadensfall (ringversteift) [28]



(b) Bauteilversuch (längsversteift) [58]

Abbildung 1.1: Lokales (a) und globales (b) Beulen ausgesteifter Zylinder unter Axialdruck

Eine Optimierung der Tragfähigkeit von beulgefährdeten Schalentragwerken ist durch die Verwendung aussteifender Elemente möglich. Die damit zunehmende Komplexität der Struktur erschwert jedoch die Formulierung einfacher Berechnungsmodelle, welche das Tragverhalten möglichst allgemeingültig abbilden. Dies führte im Bereich der Luftfahrt zu immer größeren Aussteifungsgraden, da in vielen Fällen eine steigende Steifenanzahl die Abnahme der Imperfektionsempfindlichkeit zur Folge hat und experimentell ermittelte Beullasten mit linearisierten Theorien zutreffender vorhergesagt werden können [58]. Klassische Anwendungsfälle ausgesteifter Schalen im Bauingenieurwesen sind Silo- und Behältertragwerke unter Mantel- und/oder Axialdruckbeanspruchung. Dabei ist es grundsätzlich vorteilhaft, wenn Steifen in Richtung der beulauslösenden Druckmembrankräfte angeordnet sind, da diese dann sowohl zur Stabilisierung der Mantelfläche beitragen als auch direkt am Lastabtrag beteiligt sind [52]. Abbildung 1.1 zeigt Nachbeulverformungen einer ring- sowie einer längsversteiften Zylinderschale unter axialer Druckbeanspruchung.

Mit der Entwicklung effizienter numerischer Berechnungsverfahren und der zunehmenden Verfügbarkeit von Rechenleistung kann das Stabilitätsverhalten komplexer Strukturen unter Berücksichtigung des geometrisch und materiell nichtlinearen Tragverhaltens beschrieben werden. Neben einem vertiefenden Einblick in Beulmechanismen wird dadurch in der praktischen Anwendung ein optimierter Entwurf beulgefährdeter Tragwerke ermöglicht. Dennoch besteht auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt eine wesentliche Herausforderung darin, die Imperfektionen realer Strukturen und deren Einfluss auf das Stabilitätsverhalten möglichst realitätsnah zu beschreiben.

Motivation

Für einen Nachweis ausgesteifter Schalentragwerke gegen Stabilitätsversagen stellen die im Bauingenieurwesen verbreiteten Normen spannungsbasierte Bemessungskonzepte zur Verfügung. Diese sind auf ausgewählte Beulfälle begrenzt und beschreiben ein vergleichsweise hohes Sicherheitsniveau auf Grundlage semi-empirischer Untersuchungen, um eine möglichst allgemeingültige Anwendbarkeit zu ermöglichen. Der einfachen Handhabung steht jedoch die Begünstigung eines unwirtschaftlichen Entwurfs gegenüber. Die mit den Eurocodes aktuell gültige Normengeneration verzichtet gänzlich auf einfache Handrechenverfahren für ausgesteifte Schalen und konzentriert sich statt dessen auf die Angabe von allgemeinen Regeln zur Anwendung der Finite Elemente Methode [52]. Dabei ist die Berücksichtigung von Imperfektionen weiterhin von Unsicherheiten geprägt, sodass ein hoher numerischer Aufwand erforderlich ist, um eine sichere und zugleich wirtschaftliche Bemessung zu gewährleisten.

Berücksichtigung von Imperfektionen

Die vollständige Abbildung aller realen Imperfektionen in einem numerischen Berechnungsmodell ist im Allgemeinen nicht möglich, da diese für jede Struktur unterschiedlich sind und nur mit einer gewissen Unschärfe ermittelt oder vorhergesagt werden können. Dabei weisen geometrische Imperfektionen einen signifikanten Einfluss auf die Beullasten dünner Schalentragwerke auf [33]. Eine Berechnung erfolgt daher üblicherweise unter Verwendung von geometrischen Ersatzimperfektionen, wenngleich neben der Tragwerksgeometrie noch weitere Parameter, beispielsweise die Lasteinleitung, Randbedingungen oder Materialkennwerte imperfektionsbehaftet sind.

Für die Bestimmung von Form und Amplitude möglicher Ersatzimperfektionen werden in der Literatur unterschiedliche Ansätze diskutiert. SCHMIDT [51] nimmt eine Einteilung in realistische, stimulierende und ungünstigste Ersatzimperfektionen vor. Erstere basieren auf gemessenen Imperfektionen, welche mit Hilfe von stochastischen Verfahren verteilt werden, um anschließend über ein Wahrscheinlichkeitsmaß untere Grenzwerte für Beullasten zu definieren. Stimulierende Ersatzimperfektionen sind dadurch gekennzeichnet, dass sie im Allgemeinen nicht dazu dienen realistische Imperfektionsformen zu beschrei-

ben, sondern lediglich das physikalische Beulverhalten abzubilden. Eine vergleichsweise einfache Anwendung bieten beulformaffine Imperfektionen. Problematisch ist dabei die Auswahl der anzusetzenden Eigenformen und deren Amplituden, da diese das Beulverhalten maßgeblich beeinflussen. Alternative stimulierende Verfahren berücksichtigen die Charakteristik des betrachteten Beulfalls. Dies kann für axial gestauchte Zylinder durch lokal begrenzten Störungen in Form von Einzellasten oder Randstörungen erfolgen [77], [78].

Ungünstigste Ersatzimperfektionen sind mathematisch ermittelte Imperfektionen, welche das Tragverhalten hinsichtlich Stabilitätsversagen so ungünstig wie möglich beeinflussen. Diese sind bei Schalentragwerken durch den Vorbeulzustand beeinflusst, sodass die Angabe *einer* maßgebenden Imperfektion nicht möglich ist [56]. Durch die Suche einer Störung, welche das System mit minimalem Energieeintrag in einen indifferenten Gleichgewichtszustand überführt, fällt das in der vorliegenden Arbeit verwendete Störenergiekonzept in diese Kategorie. Wesentlich ist die Annahme einer nicht anfänglich wirkenden Störung, welche für ein gegebenes Grundlastniveau individuell ermittelt wird. Daraus folgt die Beschreibung der Imperfektionsempfindlichkeit als eine vom Belastungszustand abhängige Systemeigenschaft [46]. Ein möglicher Wechsel der maßgebenden Störung bei komplexen Geometrien oder Belastungen kann damit abgebildet werden [72]. Im Vergleich zu Verfahren, welche mit stimulierenden Ersatzimperfektionen arbeiten, folgt als weiterer Vorteil, dass sowohl Form als auch Amplitude der Störung als Ergebnis einer mathematischen Optimierung direkt ermittelt werden. Nachfolgend bezieht sich die Bezeichnung der *ungünstigsten Störung* auf das im Rahmen des Störenergiekonzeptes verwendete Kriterium der minimalen Formänderungsenergie.

Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist es, das Stabilitätsverhalten ausgesteifter Schalentragwerke unter Verwendung des Störenergiekonzeptes zu untersuchen. Dieses wurde für eine gemischte Finite-Elemente-Formulierung entwickelt und für nicht ausgesteifte Schalen ausführlich diskutiert, s. [31], [46], [61], [72], [76].

Gemischte Elemente bieten den Vorteil, dass das zugrunde gelegte Variationsfunktional die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen unabhängig approximiert [21]. Dies ermöglicht die Verwendung einfacher Polynomansätze bei gleichzeitiger Erfüllung der Konvergenzkriterien für gekrümmte Elemente. Für eine Modellierung ausgesteifter Schalen sind gemischte Elemente jedoch ungeeignet, da sowohl Weg- als auch Kraftgrößen globale Freiheitsgrade repräsentieren und in den Knoten des Elementnetzes gekoppelt sind. Die bei verzweigten Strukturen auftretenden Diskontinuitäten der Kraftgrößen können damit nicht direkt abgebildet werden. Eine Verwendung klassischer Weggrößenelemente ist ebenfalls nicht möglich, da die Identifikation einer kritischen Störung im Rahmen des Störenergiekonzeptes die unabhängige Variation von Kraft- und Weggrößen voraussetzt [31]. Aus diesem Grund wird die Übertragbarkeit des Störenergiekonzeptes

auf eine gemischt-hybride Formulierung untersucht. Das zugehörige Variationsfunktional beinhaltet einerseits die geforderte unabhängige Variation und ermöglicht andererseits eine direkte Modellierung ausgesteifter Schalenträgerwerke. Mit dem Ziel einer numerisch effizienten Bearbeitung erfolgt eine Betrachtung von Locking-Effekten und des Konvergenzverhaltens bei unterschiedlichen Ansatzvarianten für ebene und gekrümmte Viereckelemente.

Die verwendete Schalentheorie 1. Approximation vernachlässigt Verzerrungen in Dickenrichtung und setzt die Gültigkeit der Kirchhoff-Love-Hypothese voraus. Der Verzerrungszustand des Schalenkontinuums wird so mit den Verschiebungen der Schalenmittelfläche im Rahmen einer 3-Parameter-Theorie abgebildet. Das geometrisch nichtlineare Tragverhalten ist durch entsprechende Terme in der Beschreibung der Membranverzerrungen berücksichtigt. Die daraus folgende Theorie moderater Rotationen kann für Verdrehungen bis 10° als ausreichend genau betrachtet werden und ist damit für die Approximation der bei Schalenbeulen auftretenden Verformungszustände geeignet.

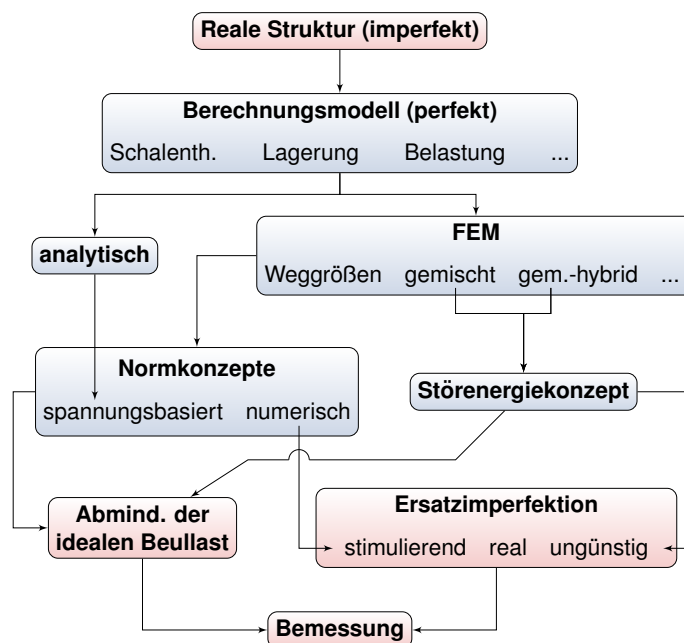


Abbildung 1.2: Einordnung des Störenergiekonzeptes in den Bemessungsablauf

Das in Abbildung 1.2 gezeigte Ablaufdiagramm stellt die Berücksichtigung von Imperfektionen durch die Einbindung des Störenergiekonzeptes in den Bemessungsablauf für beulgefährdete Schalenträgerwerke dar. Die imperfekte reale Struktur wird idealisiert und mit einem perfekten Berechnungsmodell abgebildet. Eine anschließende Berechnung mit Hilfe von gemischten oder gemischt-hybriden Finiten Elementen ermöglicht die Anwendung des Störenergiekonzeptes zur Identifikation kritischer Störungen. Mit einer Kalibrierung der minimal aufnehmbaren Störenergie an Versuchsergebnissen kann ein Beulkriterium formuliert werden, welches die reale Imperfektionsempfindlichkeit zutreffender beschreibt als eine semi-empirische Abminderung der idealen Beullasten, welche in un-

terschiedlichen Normkonzepten Anwendung findet. Alternativ ist die direkte Verwendung der kritischen Störlast als Ersatzimperfektion bei einer Bemessung mit Hilfe numerisch gestützter Nachweisformate möglich. Werden Strukturen untersucht, für welche keine experimentell abgesicherten Beullasten vorliegen, besteht die Herausforderung darin, das durch die Normung vorgegebene Sicherheitsniveau abzubilden.

2 Berechnungsmodell

Die numerische Modellbildung erfolgt durch Diskretisierung der Tragwerksgeometrie unter Verwendung gemischt-hybrider Weggrößenelemente im Rahmen der nachfolgend vorgestellten Schalentheorie. Eine wesentliche Herausforderung bei der Entwicklung von Platten- und Schalenelementen auf Grundlage der Kirchhoff-Theorie besteht in einer C^1 -konformen Beschreibung des Verschiebungsfeldes, wonach dieses, einschließlich der ersten Ableitung, sowohl im Elementgebiet als auch an den Rändern stetig sein muss. Die Einhaltung dieses Kriteriums für beliebige Elementgeometrien erfordert bei klassischen Weggrößenelementen hohe Ansatzordnungen und komplexe Elementformulierungen [45]. An dieser Stelle bieten hybride Modelle mit einer unabhängigen Beschreibung der unbekannten Feldgrößen im Elementgebiet und auf den zwischen benachbarten Elementen definierten Grenzflächen den Vorteil, die Kompatibilität mit vergleichsweise einfachen Ansatzfunktionen sicherzustellen. In Abhängigkeit von den im Elementgebiet definierten Freiwerten werden in der Literatur hybride Weggrößenmodelle, hybride Spannungsmodelle und gemischt-hybride Modelle unterschieden.

Die Vorteile hybrider Methoden bei der Abbildung von Biegezuständen werden am Beispiel hybrider Spannungselemente für Plattentragwerke deutlich. Durch die ausschließlich auf den Grenzflächen definierten Weggrößen können die Verschiebungen und die Randverdrehungen mit eindimensionalen Polynomansätzen und der damit verbundenen geringen Anzahl an Freiheitsgraden approximiert werden. So ist die Kompatibilität zwischen benachbarten Elementen sichergestellt, ohne dass ein C^1 -konformes Verschiebungsfeld am Elementübergang definiert werden muss. Die zugrunde gelegte Variationsgleichung setzt voraus, dass die Ansatzfunktionen für die Momente das homogene Gleichgewicht im Elementgebiet erfüllen. Auch unter Berücksichtigung dieses Kriteriums ist die Auswahl geeigneter Ansatzfunktionen bei ebenen Elementen vergleichsweise einfach möglich. Durch die Definition zusätzlicher lokaler Koordinatensysteme können Plattenelemente entwickelt werden, welche auch bei stark verzerrter Elementgeometrie eine effiziente Berechnung ermöglichen s. [67], [63], [64], [42], [44], [71]. Soll hingegen eine gekrümmte Geometrie beschrieben werden, ist eine geeignete Approximation der Kraftgrößen mit der Kopplung von Normalkräften und Biegemomenten im Gleichgewicht ungleich komplexer. Hier bietet eine gemischt-hybride Weggrößenformulierung den Vorteil, dass das Gleichgewicht mit der Variationsaussage natürlich erfüllt wird und in dieser Hinsicht keine erhöhten Anforderungen an die Ansatzfunktionen gestellt sind. Dem gemischten Konzept folgend, sind im Elementgebiet sowohl Kraftgrößen als auch Verschiebungen vorhanden. Die zur Sicherstellung der Kompatibilität verwendeten Verdrehungen werden aber ausschließlich auf den Grenzflächen definiert. Somit ist das Element in der Lage kontinuierliche Verläufe der Verschiebungen und Randverdrehungen an den Grenzflächen abzubilden, obwohl die Ableitungen des Verschiebungsfeldes senkrecht zum Elementrand an den Übergängen im Allgemeinen diskontinuierlich sind. Der aus der Kirchhoff-Hypothese folgende Zusammenhang zwischen Verschiebung und Verdrehung

wird am Übergang vom Elementrand zur Grenzfläche mit der Variationsgleichung natürlich erfüllt [21]. Äquivalent dazu ist mit der gemischten Formulierung auch das Momentengleichgewicht in schwacher Form berücksichtigt.

Bei praxisrelevanten Schalenstrukturen treten durch Verzweigungen, Aussteifungen oder variierende Waddicken Diskontinuitäten in den Spannungsverläufen auf. Diese können mit gemischten Elementen, welche Kraft- und Weggrößen als globale Freiheitsgrade verwenden, infolge der an den Elementübergängen gekoppelten Kraftgrößen nicht direkt abgebildet werden. Gleiches gilt für Elemente in klassischer Weggrößenformulierung, bei welchen zur Einhaltung der Konvergenzkriterien höhere Ableitungsordnungen der unbekannten Weggrößen und damit indirekt Kraftgrößen als globale Freiheitsgrade enthalten sind [36], [21]. Die im Folgenden verwendete gemischt-hybride Formulierung bietet hingegen mit lokalen Spannungsgrößen und einer freien Variation der auf den Grenzflächen definierten Verdrehungen den Vorteil, dass an den Elementübergängen lediglich eine Kopplung von Weggrößen erforderlich ist. Spannungssprünge können somit direkt abgebildet werden. Darüber hinaus wird eine Approximation der Spannungsfelder mit abgestimmten Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der im elastischen Potential auftretenden Ableitungsordnungen ermöglicht. Neben einer Reduktion des numerischen Aufwandes führt dies zu einer Verbesserung des Elementverhaltens durch Vermeidung von Locking-Effekten, s. Kapitel 2.7.

Aufgrund der andauernden Weiterentwicklung der Finite Elemente Methode ist heute eine Vielzahl unterschiedlicher Formulierungen in der Literatur verfügbar. Die vorliegende Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und verzichtet bewusst auf generelle Aussagen über *alle* finiten Elemente. Sofern nicht abweichend angegeben, beziehen sich alle Aussagen auf die nachfolgend vorgestellte 3-Parameter-Schalentheorie in Kombination mit der gemischt-hybriden Weggrößenformulierung.

2.1 Eine 1. Approximation der Schalentheorie

Grundlage für die Verwendung klassischer Strukturelemente zur Beschreibung räumlich gekrümmter Tragwerke im Rahmen der Finite Elemente Methode ist eine geeignete Schalentheorie, welche durch unterschiedliche Näherungsannahmen grundsätzlich approximativen Charakter besitzt [4]. Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen verwenden eine konsistente 1. Approximation der Schalentheorie. Diese ermöglicht eine einfache, für baupraktische Zwecke ausreichend genaue und widerspruchsfreie Beschreibung des Tragverhaltens. Als Grundlage sind die Arbeiten von LOVE [39] und REISSNER [48] zu nennen. Durch eine Ableitung der Schnittgrößen aus der Formänderungsenergiegedichte ist sichergestellt, dass diese zu den vorab definierten Verzerrungsmaßen energetisch konjugiert sind. Eine konsistente Formulierung erfordert darüber hinaus gleiche Approximationsordnungen der Gleichgewichtsbedingungen und der kinematischen Grundgleichungen. Werden erstere über die Betrachtung eines dreidimensionalen Konti-

nuums unabhängig von der Kinematik entwickelt, ist die Konsistenz nicht sichergestellt. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen führt mit Hilfe der konjugierten Verzerrungs- und Spannungsmaße hingegen zwangsläufig auf eine konsistente Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen.

Nachfolgend werden die wesentlichen Größen der verwendeten 1. Approximation zusammengefasst. Die Modellbildung erfolgt auf Grundlage einer total lagrangeschen Betrachtungsweise, bei welcher alle Beschreibungsvariablen auf die nicht verformte Ausgangskonfiguration bezogen sind. Für eine ausführliche Darstellung mit Bezug auf Schalentragwerke wird auf [14], [4] und [5] sowie für Hinweise zur allgemeinen Tensoranalysis auf [30] verwiesen.

2.1.1 Metrik der Schalenmittelfläche

Zur Beschreibung der Schalenmittelfläche im euklidischen Koordinatenraum \mathbb{R}^3 werden die körperfesten krummlinigen Koordinaten Θ^i und die zugehörigen kovarianten Basisvektoren \mathbf{a}_i eingeführt. Die Basisvektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 sind tangential zur Schalenmittelfläche angeordnet und bilden im Allgemeinen kein Orthonormalsystem während \mathbf{a}_3 normiert und orthogonal zu der von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 aufgespannten Ebene ist. Über eine Transformationsvorschrift zwischen Θ^i und den Koordinaten x^i des \mathbb{R}^3 sind die Komponenten des Ortsvektors zu jedem Punkt der Schalenmittelfläche mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta^\alpha) = x^i(\Theta^\alpha) \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

definiert. Die Basisvektoren \mathbf{a}_i können über die Ableitung des Ortsvektors nach den entsprechenden Koordinaten

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{a}_2\|} \quad (2.2)$$

bestimmt werden. Die Ermittlung von Bogenlängen auf der Schalenmittelfläche sowie die Umrechnung von ko- und kontravarianten Basisvektoren erfolgt über die Komponenten des Metriktensors

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad \mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a = \det(a_{\alpha\beta}). \quad (2.4)$$

Mit Hilfe der Änderung der Basisvektoren in Richtung der Flächenkoordinaten ist die Krümmung der Schalenmittelfläche beschrieben. Für die Komponenten des ko- und ge-

misch-varianten Krümmungstensors gilt

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3, \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \quad b_\beta^\alpha = a^{\alpha\rho} b_{\rho\beta}, \quad b_\beta^\alpha \neq b_\alpha^\beta. \quad (2.5)$$

Die für eine kovariante Ableitung der Beschreibungsvariablen benötigten Christoffelsymbole folgen zu

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\lambda, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \quad (2.6)$$

Transformation der Beschreibungsvariablen

In gleicher Weise wie die Basisvektoren können die Komponenten von Tensoren zwischen ko- und kontravarianter Darstellung transformiert werden. Aufgrund der Invarianz von \mathbf{a}_3 ist für die zugehörigen Komponenten keine Transformationsvorschrift gegeben [4]. Für den Verschiebungsvektor \mathbf{v} und den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ gilt beispielhaft

$$v_\beta = v^\alpha a_{\alpha\beta}, \quad v^\beta = v_\alpha a^{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma_{\rho\lambda} a^{\rho\alpha} a^{\lambda\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\rho\lambda} a_{\rho\alpha} a_{\lambda\beta} \quad (2.8)$$

Sind die Beschreibungsvariablen mit der Basis \mathbf{a}_i bzw. \mathbf{a}^i formuliert, ist zu beachten, dass die Längen der Basisvektoren in den Tensorkomponenten enthalten sind. Um die physikalische Deutung zu erleichtern, kann eine transformierte Darstellung mit normierten Basisvektoren erfolgen. Die so definierten physikalischen Komponenten werden nachfolgend durch runde Klammern gekennzeichnet

$$v_{(\alpha)} = v_\alpha \cdot \sqrt{a^{\alpha\alpha}}, \quad v^{(\alpha)} = v^\alpha \cdot \sqrt{a_{\alpha\alpha}}. \quad (2.9)$$

Dabei ist über unterstrichene Indizes nicht zu summieren.

2.1.2 Kinematik

Abbildung 2.1 zeigt die zugrunde gelegten kinematischen Zusammenhänge der verwendeten Schalentheorie. Der Verschiebungsvektor \mathbf{v} eines beliebigen Punktes P^* des Schalenkontinuums wird mit den Verschiebungen und Verdrehungen der Schalenmittelfläche beschrieben. Der zur Beschreibung des Verzerrungszustandes verwendete Green-Lagrange-Verzerrungstensor γ_{ij} ist über die Differenz der Metrik von Momentan- und Ausgangskonfiguration des Schalenkontinuums definiert.

Mit den Basisvektoren des Schalenkontinuums

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} + \mathbf{a}_{3,\alpha}\Theta^3 = \mu_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 \quad (2.10)$$

folgen die Komponenten $\gamma_{\alpha\beta}$ in Richtung der Flächenkoordinaten zu

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_\alpha \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{v}_{,\alpha} \mathbf{g}_\beta + \mathbf{v}_{,\alpha} \mathbf{v}_{,\beta}). \quad (2.11)$$

Dabei folgt $g_{\alpha\beta}$, analog zu Gleichung 2.3 für die Schalenmittelfläche, aus den Basisvektoren eines Punktes des Schalenkontinuums, welche in Abhängigkeit von \mathbf{a}_i und Θ^3 formuliert werden. Die in \mathbf{v} quadratischen Anteile beschreiben die geometrische Nichtlinearität.

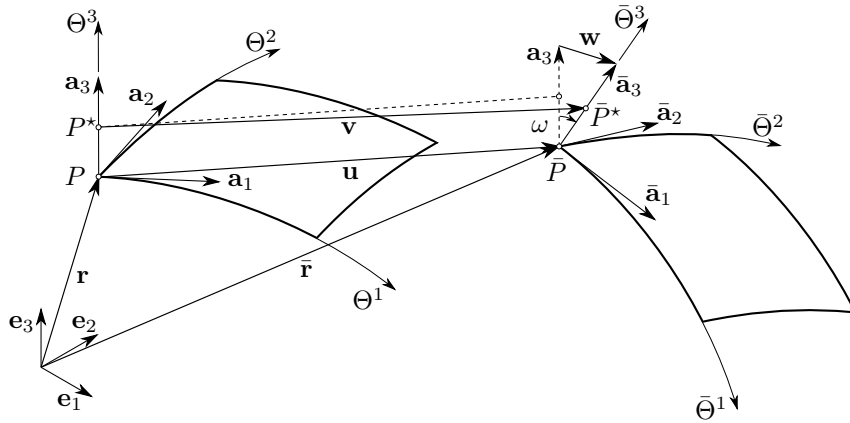


Abbildung 2.1: Kinematik unter Annahme der Kirchhoff-Love-Hypothese [4]

Die für dünne Schalen gültige Annahme ebener Querschnitte ermöglicht es die Verschiebungen des Schalenkontinuums mit den Verschiebungen und den Verdrehungen der Querschnittsflächen zu beschreiben. Werden kleine Verdrehungen ($\cos \omega \rightarrow 1$ und $\sin \omega \rightarrow \omega$) sowie kleine Verzerrungen in Dickenrichtung vorausgesetzt, folgt der linearisierte Verschiebungsvektor zu

$$\mathbf{v} = (u_\alpha + w_\alpha \Theta^3) \mathbf{a}^\alpha + (u_3 + w_3 \Theta^3) \mathbf{a}^3. \quad (2.12)$$

Eine Entwicklung der Verzerrungen $\gamma_{\alpha\beta}$ über die Differentiation von \mathbf{v} führt mit symmetrisierten Verzerrungsmaßen auf

$$\gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \beta_{\alpha\beta} \Theta^3 + \rho_{\alpha\beta} (\Theta^3)^2. \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnen $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ und $\rho_{\alpha\beta}$ die in Θ^3 konstanten, linearen und quadratischen Verzerrungsanteile. Diese Beschreibung beinhaltet für die angegebene Linearisierung des Verschiebungsvektors (Gleichung 2.12) keine weitere Näherung. Aus der Kirchhoff-Love-Hypothese ($\gamma_{\alpha 3} = 0$) folgt zusammen mit der Vernachlässigung von Verzerrungen in Dickenrichtung der für die lineare und nichtlineare Theorie gültige Zusammenhang zwi-

schen Verdrehung und Verschiebung

$$w_\alpha = -u_{3,\alpha} - b_\alpha^\lambda u_\lambda. \quad (2.14)$$

An dieser Stelle sei auf den Unterschied zwischen den als Verdrehungen bezeichneten Komponenten w_α des Verschiebungsvektors \mathbf{w} und den Komponenten des Verdrehungsvektor $\boldsymbol{\omega}$ hingewiesen, s. [4]. Dies ist bei der Berechnung der energetisch konjugierten Momentenanteile auf dem Schalenrand zu berücksichtigen, s. Kapitel 2.1.5.

Geometrisch lineare Anteile

Durch 0-fache, 1-fache und 2-fache Differentiation von Gleichung 2.13 nach Θ^3 und Auswertung bei $\Theta^3 = 0$ sind die Verzerrungen der Schalenmittelfläche definiert. Die nachfolgend vorgestellte 1. Approximation ist dadurch gekennzeichnet, dass der Schalenshifter μ_α^λ , welcher mit Gleichung 2.10 einen Zusammenhang zwischen den Basisvektoren des Schalenkontinuums \mathbf{g}_α und den Basisvektoren der Mittelfläche \mathbf{a}_α herstellt, vereinfachend mit $\mu_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\lambda$ angenommen wird. Damit entfallen die in Θ^3 quadratischen Verzerrungsanteile in Gleichung 2.13 und es verbleiben die symmetrisierten linearen Anteile

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\alpha_{\alpha\beta}^* + \alpha_{\beta\alpha}^*), \quad (2.15)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\kappa_{\alpha\beta}^* + \kappa_{\beta\alpha}^*) \quad (2.16)$$

mit den unsymmetrischen Größen

$$\alpha_{\alpha\beta}^* = u_\alpha|_\beta - b_{\alpha\beta} u_3, \quad \kappa_{\alpha\beta}^* = w_\alpha|_\beta = (-u_{3,\alpha} - b_\alpha^\lambda u_\lambda)|_\beta. \quad (2.17)$$

Ohne die Annahme für den Schalenshifter enthält $\beta_{\alpha\beta}$ neben den Krümmungsanteilen aus der Querschnittsverdrehung weitere Anteile, welche aus einer Längsdehnung in Richtung der gekrümmten Koordinaten folgt. Da diese nachfolgend nicht berücksichtigt sind, wird die Bezeichnung $\beta_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}$ gewählt.

Geometrisch nichtlineare Anteile

Die Beschreibung des geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens erfolgt im Rahmen einer Theorie mäßiger Rotationen. Diese wird für baupraktisch relevante Schalentragswerke mit Verdrehungen bis ca. 10° als ausreichend genau angesehen [14]. Werden auch hier die Dickenänderung sowie die in Θ^3 quadratischen Verzerrungsanteile vernachlässigt, folgt für die unsymmetrische Verzerrung $\alpha_{\alpha\beta}^*$ der erweiterte Zusammenhang

$$\alpha_{\alpha\beta}^* = u_\alpha|_\beta - b_{\alpha\beta} u_3 + \frac{1}{2} w_\alpha w_\beta. \quad (2.18)$$

Die Verdrehung w_α kann dabei entsprechend Gleichung 2.14 mit den Verschiebungen der Schalenmittelfläche ausgedrückt werden. Da die Kinematik ausschließlich mit den Verschiebungen u_i der Schalenmittelfläche beschrieben ist, wird die vorgestellte Schalentheorie als 3-Parameter-Theorie bezeichnet. Höhere Schalentheorien können mit Berücksichtigung von nichtlinearen Verschiebungsverläufen in Θ^3 -Richtung abgeleitet werden und enthalten weitere Weggrößen der Schalenmittelfläche als Beschreibungsvariablen.

2.1.3 Werkstoffgleichungen

Das Materialverhalten wird über den Elastizitätstensor der Schalenmittelfläche

$$E^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} \right) \quad (2.19)$$

in Abhängigkeit der Metrik sowie des E-Moduls und der Querdehnzahl isotrop-elastisch beschrieben. Mit Hilfe des Elastizitätstensors und den vorgestellten Verzerrungen der 1. Approximation ist die Formänderungsenergiedichte beschrieben. Diese entspricht dem auf das differentielle Element der Mittelfläche bezogenen elastischen Potential und folgt mit der Dehn- und Biegesteifigkeitstensen

$$D^{\alpha\beta\rho\lambda} = t \cdot E^{\alpha\beta\rho\lambda}, \quad B^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{t^3}{12} \cdot E^{\alpha\beta\rho\lambda}. \quad (2.20)$$

zu

$$\pi = \frac{1}{2} \int \gamma_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta\rho\lambda} \gamma_{\rho\lambda} d\Theta^3 = \frac{1}{2} (\alpha_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta\rho\lambda} \alpha_{\rho\lambda} + \kappa_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta\rho\lambda} \kappa_{\rho\lambda}). \quad (2.21)$$

Differenzieren der Formänderungsenergiedichte nach den Verzerrungsgrößen führt auf die Werkstoffgleichungen mit energetisch konjugierten Spannungsmaßen einer konsistenten Schalentheorie

$$n^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\rho\lambda} \alpha_{\rho\lambda}, \quad m^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\rho\lambda} \kappa_{\rho\lambda}. \quad (2.22)$$

Aufgrund der Symmetrie der Verzerrungs- und Materialtensen sind auch die Schnittgrößen symmetrisch. Die zu den Green-Langrange-Verzerrungen konjugierten Spannungsmaße sind ebenfalls auf die unverformte Ausgangskonfiguration bezogen. Für das Schalenkontinuum gilt

$$S^{ij} = E^{ijkl} \gamma_{kl} \quad (2.23)$$

wobei S^{ij} den zweiten Piola-Kirchhoffschen-Spannungstensor bezeichnet.

2.1.4 Gleichgewicht

Die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen in schwacher Form kann durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen erfolgen, wenn sichergestellt ist, dass die Vereinfachungen der Kinematik im Gleichgewicht konsistent berücksichtigt werden. Für eine explizite Angabe sei auf das elastische Potential in Kapitel 2.2 verwiesen. Die vollständige Variation des Potentials ist der virtuellen Arbeit äquivalent und enthält die Gleichgewichtsbedingungen sowie die Kinematik in schwacher Form [4].

2.1.5 Schnittgrößen und Schalenrand

Zur Beschreibung der mechanischen Variablen auf einer beliebigen Randkurve ds wird ein orthonormiertes Rechtssystem bestehend aus dem Tangentialvektor $\tau^\beta = d\Theta^\beta/ds$, dem Normalenvektor $\nu_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\tau^\beta$ und dem Basisvektor der Schalenmittelfläche \mathbf{a}_3 gewählt. Alle Vektoren sind definitionsgemäß Einheitsvektoren. Die resultierenden Schnittgrößenvektoren auf dem Schalenrand

$$\mathbf{n} = [n^\nu \ n^\tau \ n^3]^T, \quad \mathbf{m} = [m^\tau \ m^\nu]^T, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

können mit

$$n^\nu = n^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta, \quad n^\tau = n^{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta, \quad n^3 = q^\alpha \nu_\alpha \quad (2.25)$$

$$m^\nu = m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta, \quad m^\tau = -m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta \quad (2.26)$$

aus den Tensorkomponenten ermittelt werden. Der Momentenvektor enthält für die verwendete Schalentheorie per Definition keinen Anteil in Θ^3 -Richtung. Die Verdrehungen in Tangential- und Normalenrichtung folgen über die Komponenten des Verdrehungsvektors ω zu

$$\omega_\nu = -w_\tau = -w_\alpha \tau^\alpha, \quad \omega_\tau = w_\nu = w_\alpha \nu^\alpha. \quad (2.27)$$

Bei der gewählten Notation sind mit m^τ und m^ν *nicht* die Komponenten des Momentenvektors in der entsprechenden Richtung, sondern die den Verdrehungen w_τ und w_ν energetisch konjugierten Komponenten bezeichnet. Dies ist mit den vertauschten Indizes bei \mathbf{m} in Gleichung 2.24 sowie der Transformationsvorschrift in Gleichung 2.26 berücksichtigt. Die entsprechenden Energieanteile des elastischen Potentials können damit in einer einheitlichen Schreibweise

$$\oint m^\tau \omega_\nu ds = - \oint m^\tau w_\tau ds, \quad \oint m^\nu \omega_\tau ds = \oint m^\nu w_\nu ds \quad (2.28)$$

dargestellt werden. Darüber hinaus ist zu beachten, dass die Berechnung der Schnitt- und Weggrößen mit den tensoriellen Komponenten von ν und τ erfolgt. Für die resultierenden Vektoren sind jedoch aufgrund der Orthonormalität der Basisvektoren die tensoriellen und physikalischen sowie ko- und kontravarianten Komponenten identisch [4]. Bei einer programmiertechnischen Umsetzung können zuerst $\nu_{(\alpha)}$ und $\tau_{(\alpha)}$ ermittelt und anschließend mit Hilfe der Metrik der Schalenmittelfläche in tensorielle Komponenten überführt werden.

2.2 Gemischt-hybrides Weggrößenmodell

Unter der Annahme statischer, unendlich langsam aufgebrachter Belastungen lässt sich mit Hilfe der vorgestellten Grundgleichungen ein Randwertproblem formulieren, welches das Tragverhalten des Schalenkontinuums beschreibt. Für die Lösung der Randwertaufgabe mit Hilfe der Finite Elemente Methode stehen verschiedene Variationsprinzipie zur Verfügung. Eine Übersicht oft verwendeter Funktionale mit Bezug auf gemischte und hybride Elemente ist in [62] gegeben. Die Prinzipie lassen sich durch die Formulierung von Zwangsbedingungen ineinander überführen und erfüllen unterschiedliche Modellgleichungen und Randbedingungen des physikalischen Problems in natürlicher Form. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten gemischt-hybriden Weggrößenelemente beinhalten lokal im Elementgebiet definierte Spannungs- und Weggrößen, während auf den Grenzflächen ausschließlich Weggrößen als globale Freiheitsgrade vorhanden sind. Eine statische Kondensation der Spannungsgrößen ist möglich, da diese an den Elementgrenzen nicht gekoppelt sind und die Übergangsbedingungen mit der Variationsgleichung in schwacher Form erfüllt werden. Die resultierenden Steifigkeitsmatrizen enthalten nur die global definierten Weggrößenfreiheitsgrade und werden mit den bekannten Methoden der FEM zu einem Gesamtgleichungssystem assembliert. Da die verwendete gemischt-hybride Formulierung als eine Erweiterung der gemischten Methode interpretierbar ist, sind nachfolgend beide Varianten erläutert.

Gemischte Formulierung

Das für eine gemischte Finite-Elemente-Formulierung verwendete Hellinger-Reissner-Funktional Π_{HR} enthält die kinematischen und statischen Grundgleichungen sowie die zugehörigen Randbedingungen in schwacher Form. Mit dem zweiten Piola-Kirchhoffschen-Spannungstensor und den konjugierten Green-Lagrange-Verzerrungen folgt

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = \int_V \left(S^{ij} \gamma_{ij} - \frac{1}{2} S^{ij} (E^{ijkl})^{-1} S^{kl} - \bar{f}^i v_i \right) dV \\ - \int_{\partial V_v} t^i (v_i - \bar{v}_i) d\partial V - \int_{\partial V_s} \bar{t}^i v_i d\partial V. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Auf den Randbereichen ∂V_v und ∂V_s sind die Verschiebungs- und Spannungsgrößen \bar{v}_i und \bar{t}^i vorgegeben. Für konservative Systeme ist ein Gleichgewichtszustand mit einer verschwindenden ersten Variation beschrieben

$$\Pi_{HR} \rightarrow \text{stationär} \quad \hat{=} \quad \delta \Pi_{HR} = 0. \quad (2.30)$$

Unabhängige Beschreibungsvariablen in Π_{HR} sind die Verschiebungen und Spannungen des Schalenkontinuums V . Das Funktional kann aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie durch eine Lockerung der kinematischen Grundgleichung und der zugehörigen Weggrößenrandbedingungen mittels Lagrange-Multiplikatoren bei gleichzeitiger impliziter Erfüllung der konstitutiven Gleichungen abgeleitet werden, s. [62]. Dieser Zusammenhang macht die Forderung der verschwindenden Variation als Stationarität des elastischen Potentials anschaulich deutlich. Ohne implizite Erfüllung der konstitutiven Gleichungen ergibt sich das Prinzip nach HU-WASHIZU [81], welches alle Grundgleichungen explizit beinhaltet und ebenfalls statische und kinematische Randbedingungen natürlich erfüllt. Die Allgemeingültigkeit der Variationsgleichung führt jedoch oft zu Schwierigkeiten bei der Wahl geeigneter Ansatzfunktionen [46].

Eine weitere alternative Herleitung ist durch die Formulierung des Gleichgewichtes mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen möglich. Anstatt in die so gewonnene schwache Form die kinematischen Grundgleichungen einzusetzen, wie es bei einer reinen Weggrößenformulierung erfolgt, werden diese über das Prinzip der virtuellen Kräfte ebenfalls in schwacher Form erfüllt.

Nach einer Unterteilung des Funktionals in n Elemente ergibt sich die Forderung aus Gleichung 2.30 für das gesamte System aus der Summe über alle Elemente

$$\Pi_{HR} = \sum_n \Pi_{HR}^e \rightarrow \text{stationär} \quad \hat{=} \quad \delta \Pi_{HR} = \delta \sum_n \Pi_{HR}^e = 0. \quad (2.31)$$

Die Stetigkeit von Kraft- und Weggrößen an den Elementübergängen wird äquivalent zu den statischen und kinematischen Randbedingungen mit der Variationsgleichung natürlich erfüllt. Im Rahmen einer Anwendung für dünne Flächentragwerke können die Rand- und Übergangsbedingungen für die Verschiebungen und die Momente zu Zwangsbedingungen erklärt werden, um die Variationsaussage von Randintegralen zu befreien [20]. Dabei ist zu beachten, dass bei Annahme der Kirchhoff-Love-Theorie die Torsionsmomente auf dem Rand nicht unabhängig, sondern über die Ersatzquerkraft beschrieben, verfügbar sind. Aus diesem Grund entfallen mit der genannten Zwangsbedingung nur die Anteile für die Biegemomente. Das Integral, welches die Randbedingungen für die Torsionsmomente beschreibt, ist hingegen auszuwerten [46], [2].

Gemischt-hybride Erweiterung

Eine Möglichkeit die Variationsaussage der gemischten Formulierung hinsichtlich der Zwangsbedingungen an den Elementübergängen zu modifizieren, entsteht mit der Einführung zusätzlicher Grenzflächen $F_e = F_{ev} + F_{eS}$ zwischen den Elementen, s. Abbildung 2.2. Diese sind mit den Randflächen der Elemente über $F_e = \partial V_e^- = \partial V_e^+$ verknüpft. Als globale Freiheitsgrade sind die Verschiebungen \tilde{v}_i des Schalenkontinuums auf den Grenzflächen definiert. Mit Vorgabe der wesentlichen Rand- und Übergangsbedingungen

$$\tilde{v}_i = \bar{v}_i \quad \text{auf } F_{ev} \quad (2.32)$$

$$\tilde{v}_i = \tilde{v}_i^+ = \tilde{v}_i^- \quad \text{auf } F_e, \partial V_e^- \text{ und } \partial V_e^+ \quad (2.33)$$

folgt die gemischt-hybride Weggrößenformulierung des Hellinger-Reissner-Funktional mit

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}^{gh} = \sum_n \{ & \int_{V_e} \left(S^{ij} \gamma_{ij} - \frac{1}{2} S^{ij} (E^{ijkl})^{-1} S^{kl} - \bar{f}^i v_i \right) dV \\ & - \int_{F_e} t^i (v_i - \tilde{v}_i) dF - \int_{F_{eS}} \bar{t}^i \tilde{v}_i dF \}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Das Funktional beinhaltet das Gleichgewicht und die Kinematik im Elementgebiet sowie die Weg- und Krastrandbedingungen zwischen Grenzfläche und Elementrand in schwacher Form [62].

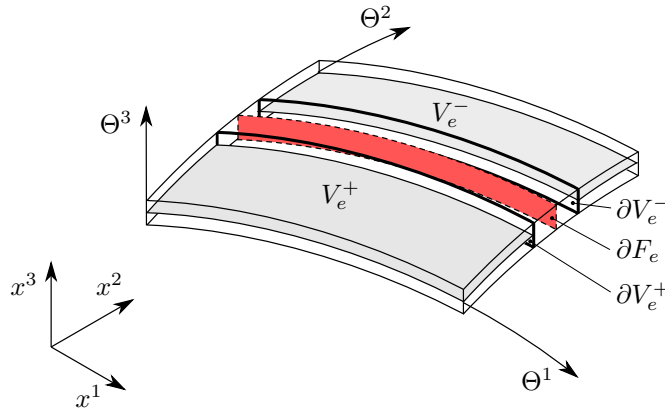


Abbildung 2.2: Benachbarte hybride Elemente und Grenzfläche [21]

Gemischt-hybrides Weggrößenfunktional für dünnwandige Schalen

Nach Übertragen von Gleichung 2.34 auf die in Kapitel 2.1 beschriebene 3-Parameter-Schalentheorie folgt das gemischt-hybride Weggrößenfunktional mit den kinematischen

Beziehungen aus Kapitel 2.1.2 und den Nachgiebigkeitstensoren

$$F_{\alpha\beta\rho\lambda}^D = (D_{\alpha\beta\rho\lambda})^{-1}, \quad F_{\alpha\beta\rho\lambda}^B = (B_{\alpha\beta\rho\lambda})^{-1} \quad (2.35)$$

sowie den Übergangsbedingungen für die Verschiebungen zwischen Grenzflächen und Elementrand

$$u_i = \tilde{u}_i \quad (2.36)$$

und unter Ausnutzung der Symmetrie der Schnittgrößen zu

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}^{gh} = & \sum_n \left\{ \int_{A_e} [n^{\alpha\beta} (u_{\beta|_{\alpha}} - b_{\beta\alpha} u_3) + m^{\alpha\beta}|_{\alpha} (u_{3,\beta} + b_{\beta}^{\lambda} u_{\lambda})] dA \right. \\ & + \int_{A_e} \left[n^{\alpha\beta} \frac{1}{2} (u_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}) (u_{3,\beta} + b_{\beta}^{\rho} u_{\rho}) \right] dA \\ & - \int_{A_e} \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\rho\lambda}^D n^{\rho\lambda} + m^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\rho\lambda}^B m^{\rho\lambda}) dA \\ & - \int_{A_e} (\bar{p}^i u_i - \bar{\alpha}_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \bar{\kappa}_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}) dA - \oint_{s_{eS}} (\bar{n}^i u_i + \bar{m}^{\nu} \tilde{w}_{(\nu)}) ds \\ & \left. - \oint_{s_e} (\nu_{\alpha} \tau_{\beta} \tau^{\rho} m^{\alpha\beta} (u_{3,\rho} + b_{\rho}^{\lambda} u_{\lambda}) - \nu_{\alpha} \nu_{\beta} m^{\alpha\beta} \tilde{w}_{(\nu)}) ds \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Da auf den Grenzflächen Verdrehungen als globale Freiheitsgrade vorgesehen sind, entfällt das Randintegral über F_e in Gleichung 2.34 trotz der genannten Übergangsbedingung für die Verschiebungen nicht vollständig. Zur Sicherstellung der Stetigkeit der Randverdrehungen zwischen den Elementen bleibt \tilde{w}_{α} auf den Grenzflächen bestehen, wenn gleichwohl die Komponenten in Tangentialrichtung mit Gleichung 2.14 und 2.27 sowie den Übergangsbedingungen für die Verschiebungen durch u_i ersetzt werden. Dies berücksichtigt, dass die Verdrehung um die Randnormale nach der Kirchhoff-Love-Hypothese nicht als unabhängige Randgröße gesetzt werden kann. Mit Vorgabe der Verschiebungen u_i ist die Verdrehung w_{τ} mit der Ableitung von u_3 entlang der Randkurve bereits eindeutig beschrieben [4]. Somit verbleibt die Verdrehung normal zum Elementrand \tilde{w}_{ν} als einzige unabhängige Variable auf den Grenzflächen [21]. Aufgrund der orthonormierten Basisvektoren des Elementrandes sind tensorielle und physikalische Komponenten der Randgrößen identisch und es gilt $\tilde{w}_{\nu} = \tilde{w}_{(\nu)}$.

Die aus den Verdrehungen des Elementrandes w_α verbleibenden Anteile des Randintegrals werden mit Gleichung 2.14 mit den Verschiebungen der Mittelfläche beschrieben und entfallen nach teilweiser Integration der im Gebiet wirksamen Biegeanteile. Mit der Verlagerung der kovarianten Ableitung von der Verdrehung $w_\beta|_\alpha$ auf den Momententensor $m^{\alpha\beta}$ ist im Gegensatz zur Weggrößenformulierung keine Ableitung des Krümmungstensors im Funktional enthalten.

Über eine verschwindende Variation nach allen Unbekannten wird ein Gleichgewichtszustand des Schalentragwerkes unter vorgegebener Belastung beschrieben. Dabei erfasst das zweite Integral die geometrische Nichtlinearität unter Annahme moderater Rotationen. Mit $\bar{\alpha}_{\alpha\beta}$ und $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ können vorgegebene Verzerrungen berücksichtigt werden. Eine Erweiterung um entsprechende Terme zur Erfassung elastischer Bettungen ist möglich, s. [21]. Die kovarianten Ableitungen folgen aus den allgemein gültigen Gleichungen für Tensorkomponenten

$$u_\beta|_\alpha = u_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda u_\lambda, \quad m^{\alpha\beta}|_\alpha = m^{\alpha\beta}_{,\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha m^{\lambda\beta} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\beta m^{\alpha\lambda}. \quad (2.38)$$

Da das Funktional nach Gleichung 2.37 die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen ist, wird dieses nachfolgend verkürzt als Π bzw. in diskretisierter Form als Π^e bezeichnet.

2.3 Ansatzfunktionen

Für die vorgestellte gemischt-hybride Formulierung sind mit den Konvergenzkriterien geringere Anforderungen an die Ansatzfunktionen gestellt, als bei vergleichbaren Weggrößenelementen. Aufgrund der schwachen Formulierung der Kontinuitätsbedingung zwischen Elementrand und Grenzfläche und der damit möglichen unabhängigen Variation der Verdrehungen \tilde{w}_ν , ist der durch die Kirchhoff-Love-Hypothese gegebene Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Verdrehungen (Gleichung 2.14) natürlich erfüllt. Es ist nicht erforderlich Ableitungen des Verschiebungsfeldes als Knotenfreiwerte einzuführen, um die Konformität sicherzustellen. Die Approximation der unbekannten Weggrößen kann so mit Lagrange-Polynomen geringer Ordnung erfolgen [21]. Darüber hinaus ermöglicht die Definition der Kraftgrößen im Elementgebiet, diese mit mathematischen Ansatzfunktionen zu approximieren, ohne dass eine Normierung auf Knotenfreiwerte erforderlich ist. Das Abstimmen der Kraft- und Weggrößenansätze ist damit in einfacher Weise möglich, wenngleich im Einzelfall eine nähere Betrachtung erforderlich ist.

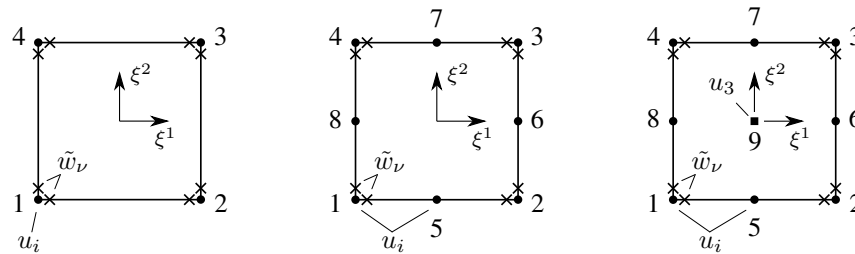
Um ein stabiles Elementverhalten sicherzustellen und zusätzliche Nullenergiemoden durch einen Rangabfall der Steifigkeitsmatrix zu vermeiden, muss die Anzahl der Kraftgrößenfreiwerte n_σ größer oder gleich der Anzahl der um die Starrkörpermoden n_r reduzierten Verschiebefeiwerte n_u sein [43]

$$n_\sigma \geq n_u - n_r. \quad (2.39)$$

Gilt $n_\sigma > n_u - n_r$ ist das Spannungsfeld statisch unbestimmt beschrieben und es können Locking-Effekte auftreten [47], [24]. Eine weitere Verbesserung des Elementverhaltens, insbesondere bei verzerrter Geometrie, ist durch eine Modifikation der natürlichen lokalen Koordinaten zur Approximation der Kraftgrößen gegeben. Mit dem Ziel eine möglichst einfache und effiziente Elementformulierung zu erhalten, werden die Auswirkungen unterschiedlicher Ansatzfunktionen und Koordinatensysteme für die Kraftgrößen sowie Techniken zur Vermeidung von Versteifungseffekten in Kapitel 2.7 diskutiert.

2.3.1 Approximation der Weggrößen

Dem isoparametrischen Konzept für Rechteckelemente folgend, ist eine bilineare Approximation der Verschiebungen naheliegend. Die Beschreibung der unbekannten Felder u_i folgt mit Ersetzen der Knotenkoordinaten Θ_k^α durch die diskreten Knotenverschiebungen \hat{u}_i^k aus Gleichung 2.54. Um die erhöhte Ableitungsordnung in der kinematischen Grundgleichung von Biegezuständen (s. Gleichung 2.16) in die Untersuchung des Elementverhaltens einzubeziehen, wird darüber hinaus ein quadratischer Lagrange-Ansatz mit 9 Knoten sowie ein quadratischer Serendipity-Ansatz mit 8 Knoten für die Verschiebungen u_3 betrachtet. Für eine explizite Angabe der Ansatzfunktionen sei auf die Grundlagenliteratur verwiesen, z. B. [85]. Die Verschiebungen in der Tangentialebene u_α sind für beide Fälle über einen quadratischen Serendipity-Ansatz beschrieben. Dies vereinfacht die Wahl abgestimmter Normalkraftansätze, während gleichzeitig in allen Randknoten Freiheitsgrade für die drei Verschiebungen u_i vorhanden sind und eine einheitliche Transformation bei einer Kopplung verzweigter Elemente gewährleistet ist. Abbildung 2.3 zeigt die untersuchten Elementvarianten.



	u_α	u_3	\tilde{w}_ν
a	vollst. linear	vollst. linear	linear
b	quadr. Serendipity	quadr. Serendipity	linear
c	quadr. Serendipity	vollst. quadratisch	linear

Abbildung 2.3: Elemente mit vier (a), acht (b) und neun (c) Knoten für u_i sowie acht Loof-Knoten

Werden die Verdrehungen \tilde{w}_ν , wie bei ebenen Plattenelementen üblich, in die Koordinatenrichtungen der Mittelfläche transformiert und über Freiwerte in den Eckknoten abgebildet, müssen bei Elementen, welche nicht in einer Tangentialebene liegen, zusätzliche Verdrehungen um die Schalennormale eingeführt werden. Diese sind nicht Bestandteil der

verwendeten Schalentheorie und lediglich Hilfsgrößen, um eine eindeutige Transformation der Verdrehungen im dreidimensionalen Raum zu ermöglichen. Aus diesem Vorgehen resultiert die Zwangslage, dass die in das System eingebrachten künstlichen Steifigkeiten möglichst gering sein müssen, um das tatsächliche Verformungsverhalten nicht zu beeinflussen und gleichzeitig ausreichend groß, um die Stabilität des Elementes sicherzustellen [64]. Wird \tilde{w}_ν hingegen direkt approximiert und sind die Freiwerte nicht in den Eckknoten sondern auf den Elementrändern definiert, lassen sich nicht planar angrenzende Elemente ohne weitere Transformation der Verdrehungen koppeln. Dieses Konzept wurde ursprünglich bei dem von IRONS [25] entwickelten Semi-Loof-Element im Rahmen einer Weggrößenformulierung eingesetzt und später auf hybride Elementformulierungen übertragen, s. [64], [21]. Die genaue Lage der sogenannten Loof-Knoten hat keinen Einfluss auf das Lösungsverhalten, sofern die Abstände zu den benachbarten Randknoten identisch sind [63]. Mit dem Ziel einer einfachen numerischen Umsetzung sind die Verdrehungen nachfolgend in infinitesimalem Abstand zu den Eckknoten, aber dennoch nur auf dem jeweiligen Elementrand definiert.

Bei Schalen mit geringer Biegetragwirkung führen Elemente mit konstanten Ansätzen für die Randverdrehungen \tilde{w}_ν bereits zu akzeptablen Ergebnissen [21]. Da eine kritische Störung hinsichtlich der Stabilität von Schalen jedoch im wesentlichen Biegebeanspruchungen hervorruft, erfolgt die Approximation bei allen Elementvarianten linear entlang des jeweiligen Randes. Jedes Element verfügt somit über acht Loof-Knoten.

Für die numerische Integration der Arbeitsgleichung werden zwei bzw. drei Stützstellen in jede Koordinatenrichtung bei linearen bzw. quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen verwendet. Ausgenommen sind Elemente mit quadratischen Anteilen in den Kraftgrößenansätzen, welche auch bei linearer Approximation der Verschiebungen mit drei Gauß-Punkten je Koordinatenrichtung integriert werden.

2.3.2 Approximation der Membrankräfte

Für Elemente mit bilinearen Verschiebungsansätzen werden, neben einer ebenfalls bilinearen Approximation der Membrankräfte, die von PIAN und SUMIHARA [41] vorgestellten abgestimmten Ansatzfunktionen untersucht, s. auch [19]. Mit dem Ziel verbesserter Konvergenzeigenschaften bei verzierter Elementgeometrie und einer Gewährleistung der Drehinvarianz sind die Ansätze für die lokalen Schnittgrößen $n_{lo}^{\rho\lambda}$ mit

$$n_{lo}^{11} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \xi^2, \quad n_{lo}^{22} = \hat{n}_3 + \hat{n}_4 \xi^1, \quad n_{lo}^{12} = \hat{n}_5. \quad (2.40)$$

gegeben und mit Hilfe der Transformationsvorschrift für kontravariante Tensorkomponenten

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial \Theta^\beta}{\partial \xi^\lambda} n_{lo}^{\rho\lambda} \quad (2.41)$$

transformiert. Die Ableitungen der globalen Koordinaten nach den lokalen Koordinaten entsprechen den Einträgen der Jacobi-Matrix. Diese wird im Elementmittelpunkt ausgewertet, um zu vermeiden, dass sich die Polynomordnung bei verzerrten Elementen infolge einer veränderlichen Jacobi-Matrix erhöht [41], [47]. Die Anzahl der Unbekannten entspricht der nach Gleichung 2.39 geforderten Mindestanzahl von fünf Kraftgrößenfreiwerten für die vorhandenen acht Tangentialverschiebungen u_α^k . Durch die konstante Beschreibung von n^{12} im gesamten Elementgebiet sowie von n^{11} und n^{22} in der jeweiligen Wirkungsrichtung ist eine zu den Verschiebungen gleichwertige Approximation der in Gleichung 2.37 enthaltenen linearen Membrankräfte gewährleistet.

Die abgestimmten Normalkraftansätze für Elemente mit quadratischem Serendipity Ansatz für die Tangentialverschiebungen folgen äquivalent zu

$$\begin{aligned} n_{lo}^{11} &= \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \xi^1 + \hat{n}_3 \xi^2 + \hat{n}_4 \xi^2 \xi^2 + \hat{n}_5 \xi^1 \xi^2, \\ n_{lo}^{22} &= \hat{n}_6 + \hat{n}_7 \xi^1 + \hat{n}_8 \xi^2 + \hat{n}_9 \xi^1 \xi^1 + \hat{n}_{10} \xi^1 \xi^2, \\ n_{lo}^{12} &= \hat{n}_{11} + \hat{n}_{12} \xi^1 + \hat{n}_{13} \xi^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens verzerrter Scheibenelemente stellen YUAN et al. [84] ein lokales Koordinatensystem vor, mit welchem das homogene Gleichgewicht für beliebige Elementgeometrien durch die abgestimmten Ansätze im gesamten Elementgebiet erfüllt wird. Mit den von PIAN und SUMIHARA [41] verwendeten natürlichen Koordinaten gilt dies nur für parallelogrammförmige Elemente. Die modifizierten Koordinaten sind zu

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + \frac{j_2}{j_0} \xi^1 \xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + \frac{j_1}{j_0} \xi^1 \xi^2. \quad (2.43)$$

gewählt. Dabei bezeichnet j_i die mit der Elementgeometrie festgelegten Anteile der Determinante der Jacobi-Matrix

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial \Theta^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Theta^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi^1} = j_0 + j_1 \xi^1 + j_2 \xi^2. \quad (2.44)$$

Für rechtwinklige Elemente sind $\bar{\xi}^\alpha$ und ξ^α mit $j_1 = j_2 = 0$ identisch. Die Transformationsvorschrift aus Gleichung 2.41 findet ebenfalls Anwendung, wobei ξ^α durch $\bar{\xi}^\alpha$ zu ersetzen ist. Infolge der speziellen Definition der Koordinaten ist die resultierende Jacobi-Matrix im gesamten Element konstant und entspricht der Jacobi-Matrix für natürliche Koordinaten an der Stelle $\xi^1 = \xi^2 = 0$.

2.3.3 Approximation der Momente

PIAN und WANG zeigen in [44] am Beispiel ebener hybrider Spannungselemente auf Grundlage der Kirchhoff-Hypothese, dass ein verbessertes Elementverhalten möglich ist, wenn mehr als die nach Gleichung 2.39 geforderte Mindestanzahl an Freiheitsgraden verwendet wird. Bei verzerrten Elementen ist der Einfluss besonders deutlich. Dieses Vorgehen kann jedoch bei einer Anwendung auf gekrümmte Schalenelemente dazu führen, dass nicht alle erforderlichen Starrkörpermoden abgebildet werden.

Um eine unabhängige Bewertung unterschiedlicher Ansätze für die Biegemomente im Rahmen der gemischt-hybriden Formulierung zu ermöglichen, sind die in Tabelle 2.1 zusammengefassten Ansätze für ebene und gekrümmte Elemente betrachtet. Die Bezeichnungen beziehen sich auf die Anzahl an Momentenfreiheitsgraden, welche zur Gewährleistung der Elementstabilität mindestens mit 9, 13 und 14 für die Elementvarianten a, b und c gewählt werden müssen. Fett dargestellte Monome für das Torsionsmoment sind mit Anteilen von $m^{\alpha\alpha}$ gekoppelt. Eine explizite Angabe der Polynome erfolgt am Ende des Kapitels.

Die aus den Literaturstellen [44], [67] und [63] entnommenen Ansätze wurden für ebene hybride Spannungselemente entwickelt und erfüllen, mit Ausnahme von $12\hat{m}$, bei regulärer Elementgeometrie das homogene Gleichgewicht der Kirchhoffschen Plattentheorie. Diese Eigenschaft ist bei hybriden Spannungselementen erforderlich und führt teilweise zu einer Kopplung der Monome. Für beliebig verzerrte Elemente ist die Einhaltung des homogenen Gleichgewichtes nur bei Verwendung alternativer lokaler Koordinatensysteme gegeben [63]. Obwohl die gemischt-hybride Variationsaussage das Gleichgewicht natürlich erfüllt, kann auch hier das Elementverhalten durch die alternativen Koordinaten aus Gleichung 2.43 und 2.45 positiv beeinflusst sein, s. Kapitel 2.7. Auf dieser Grundlage entwickeln SZE und CHOW [67] lokale Koordinaten für hybride Plattenelemente, welche das homogene Gleichgewicht erfüllen

$$\begin{aligned}\xi^{1*} &= (a_1^2 + b_1^2) \xi^1 + (a_1 a_2 + b_1 b_2) \xi^1 \xi^2 + (a_1 a_3 + b_1 b_3) \xi^2, \\ \xi^{2*} &= (a_3 a_1 + b_3 b_1) \xi^1 + (a_3 a_2 + b_3 b_2) \xi^1 \xi^2 + (a_3^2 + b_3^2) \xi^2.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Dies ist für gültige Ansätze zwar auch für die Koordinaten nach Gleichung 2.43 gegeben, Untersuchungen an Plattenelementen zeigen jedoch, dass diese bei Verwendung von $\xi^{\alpha*}$ weniger empfindlich auf Netzverzerrungen reagieren [63].

Die $\xi^{\alpha*}$ -Koordinaten folgen aus einer Projektion des globalen Θ^α -Koordinatensystems auf die natürlichen Koordinatenrichtungen, wobei ersteres zuvor in den Ursprung des natürlichen Koordinatensystems verschoben wurde. Damit zeigen die Basisvektoren der Koordinatensysteme in gleiche Richtungen, unterscheiden sich aber in ihrer Länge. Da $\xi^{\alpha*}$ somit für rechteckige Elemente im Gegensatz zu $\bar{\xi}^\alpha$ nicht in die natürlichen Koordinaten übergeht, ist in Abhängigkeit des Momentenansatzes auch ein Einfluss bei regel-

Tabelle 2.1: Untersuchte Ansatzvarianten für $m^{\alpha\beta}$

u_3		Ansatz		$m^{\alpha\alpha}$				m^{12}			
a	lin.	$9\hat{m}$ -I [44]	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$		1			
		$9\hat{m}$ -II [63]	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$		1	ξ^1	ξ^2	
		$11\hat{m}$ [44]	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$		1	ξ^1	ξ^2	
		$12\hat{m}$ [67]	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$		$\hat{=}m^{\alpha\alpha}$			
b	quad.	$13\hat{m}$ -I	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$	$\xi^1\xi^1/\xi^2\xi^2$		1	ξ^1	ξ^2
		$13\hat{m}$ -II [44]	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$	$\xi^1\xi^1/\xi^2\xi^2$		1	ξ^1	ξ^2
		$13\hat{m}$ -III [63]	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$	$\xi^1\xi^1/\xi^2\xi^2$	$\xi^1\xi^1\xi^2/\xi^1\xi^2\xi^2$	1	ξ^1	ξ^2
c	serend.	$14\hat{m}$ -I	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$	$\xi^1\xi^1/\xi^2\xi^2$		1	ξ^1	ξ^2
		$14\hat{m}$ -II	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$	$\xi^1\xi^1/\xi^2\xi^2$	$\xi^1\xi^1\xi^2/\xi^1\xi^2\xi^2$	1	ξ^1	ξ^2
		$18\hat{m}$	1	ξ^1	ξ^2	$\xi^1\xi^2$	$\xi^1\xi^1$	$\xi^2\xi^2$	$\hat{=}m^{\alpha\alpha}$		

mäßigen Netzen vorhanden. Dies gilt jedoch nicht für quadratische Elementgeometrien, bei welchen das Längenverhältnis von globalen zu lokalen Basisvektoren für beide Richtung identisch ist, s. Kapitel 2.7.2. Die zugehörige Jacobi-Matrix $\partial\Theta^\alpha/\partial\xi^{\beta*}$ entspricht der invertierten, transponierten Jacobi-Matrix für natürliche Koordinaten im Elementmittelpunkt und ist damit im gesamten Element konstant.

Aus der programmtechnische Umsetzung der alternativen Koordinaten für das beschriebene gemischt-hybride Element ergeben sich unter Umständen numerische Probleme bei der Kondensation der Kraftgrößen. Erfolgt die Beschreibung der Feldgrößen mit tensoriellen Komponenten, besteht die Möglichkeit, dass bei großen Differenzen zwischen den einzelnen Komponenten des Metriktensors $a_{\alpha\beta}$ auch für Elemente, welche nach physikalischen Längen quadratisch sind, große Differenzen zwischen den Flächenkoordinaten benachbarter Knoten auftreten. Dieser Sachverhalt wird am Beispiel einer Zylinderschale mit dem Radius r und der Länge l anschaulich deutlich. Der kovariante Basisvektor entlang der gekrümmten Koordinatenachse hat die Länge $\|\mathbf{a}_1\| = r$, während in Meridianrichtung aufgrund der verschwindenden Krümmung $\|\mathbf{a}_2\| = 1$ gilt. Liegt das globale kartesische Koordinatensystem auf der Rotationsachse, entsprechen die Flächenkoordinaten in Ringrichtung Polarkoordinaten und lassen sich als Winkel zum Ursprung deuten. Werden nun Zylinder mit gleichem Verhältnis r/l aber variierendem Radius bei identischer Elementanzahl untersucht, sind die Θ^1 -Koordinaten der Elementknoten für alle Zylinder identisch, während die Koordinaten in Θ^2 -Richtung aufgrund der unterschiedlichen Zylinderlängen variieren. Obwohl damit das in physikalischen Längen gemessene Seitenverhältnis der einzelnen Elemente konstant bleibt, werden diese bezogen auf die Flächenkoordinaten mit steigendem Radius schlanker. Somit nimmt die Konditionszahl der in tensoriellen Komponenten beschriebenen Elementmatrix infolge der größer werdenden Unterschiede zwischen den Steifigkeiten zu. Dies kann dazu führen, dass die Untermatrix \mathbf{K}_{ss} im Rahmen der Rechengenauigkeit singulär wird und die für die Kondensation benötigte Inverse nicht gebildet werden kann. Dieser Effekt wird bei Verwendung der alternativen lokalen Koordinaten $\xi^{\alpha*}$ verstärkt, da durch die Projektion der Flächenkoordinaten auf die Richtungen der natürlichen Koordinaten die unterschiedlichen Längen der Basisvektoren \mathbf{a}_α bereits bei der Auswertung der Ansatzfunktionen eingehen.

Ansatzfunktionen für die Biegemomente

9 \hat{m} -I [44]

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_9 \end{bmatrix}$$

9 \hat{m} -II [63]

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 \\ 0 & 2\xi^2 & 2\xi^1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_9 \end{bmatrix}$$

11 \hat{m} [44]

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 \\ 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{11} \end{bmatrix}$$

12 \hat{m} [67]

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{12} \end{bmatrix}$$

13 \hat{m} -I

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^1 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^2 \xi^2 \\ 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{13} \end{bmatrix}$$

13 \hat{m} -II [44]

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^1 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^2 \xi^2 \\ 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & -\xi^1 \xi^2 & -\xi^1 \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{13} \end{bmatrix}$$

13 \hat{m} -III [63]

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^1 & 0 & 2\xi^1 \xi^1 \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^2 \xi^2 & 0 & 2\xi^1 \xi^2 \xi^2 \\ 0 & 2\xi^2 & 2\xi^1 & 0 & 0 & 0 & -\xi^1 \xi^2 & -\xi^1 \xi^2 & -\xi^1 \xi^2 \xi^2 & -\xi^1 \xi^1 \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{13} \end{bmatrix}$$

14 \hat{m} -I

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^1 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & 0 & \xi^2 \xi^2 \\ 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{14} \end{bmatrix}$$

14 \hat{m} -II

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^1 & 0 & \xi^1 \xi^1 \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 & 0 & \xi^2 \xi^2 & 0 & \xi^1 \xi^2 \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^2 & \xi^1 & 0 & 0 & 0 & \xi^1 \xi^2 & \xi^1 \xi^2 & \xi^1 \xi^2 \xi^2 & \xi^1 \xi^1 \xi^2 & \xi^1 \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_4 \\ \vdots \\ \hat{m}_{14} \end{bmatrix}$$

18 \hat{m}

Vollständiger Ansatz 2. Ordnung, nicht gekoppelt.

2.4 Transformation der Freiheitsgrade

Die gemischt-hybride Formulierung ermöglicht eine direkte Modellierung verzweigter Strukturen, da Diskontinuitäten im Kraftgrößenverlauf durch die elementweise lokal definierten Freiwerte abgebildet werden können. Gleichzeitig erfordert die Einhaltung der Übergangsbedingungen zwischen Elementen, welche nicht in einer Tangentialebene liegen, eine Transformation der unbekannten Weggrößen in ein einheitliches Koordinatensystem. Abbildung 2.4 zeigt zwei durch die krummlinigen Koordinaten Θ^i und $\bar{\Theta}^i$ beschriebene Teilstrukturen sowie exemplarisch ein Element mit bilinearer Approximation aller Verschiebungen.

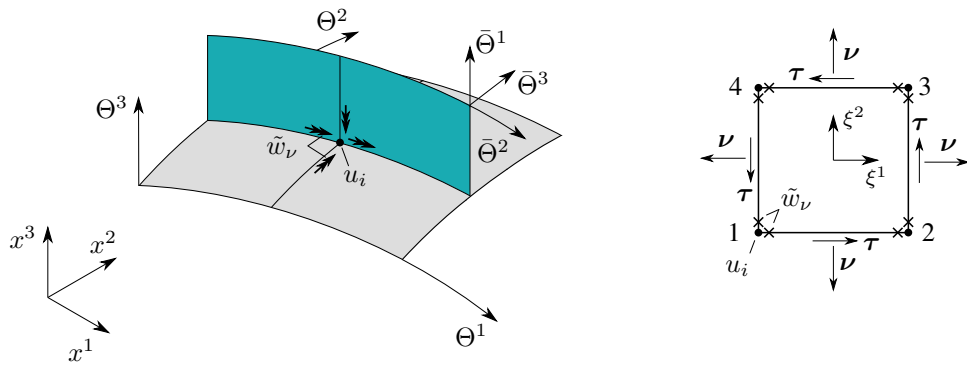


Abbildung 2.4: Gekoppelte Teilstrukturen und Referenzelement mit vier Eck- und acht Loof-Knoten

Verschiebungen

Eine eindeutige Zuordnung der Elementsteifigkeiten in den gemeinsamen Knoten ist möglich, wenn eine Transformation aller Größen in das globale x^i -Koordinatensystem erfolgt. Daraus folgt der Vorteil, dass bei einer generellen Transformation aller im Modell vorhandenen Verschiebungsfreiheitsgrade eine Unterscheidung zwischen Knoten mit bzw.

ohne Verzweigung nicht erforderlich ist. Nachteilig wirkt sich aus, dass die Anteile aus Membran- und Biegetragverhalten in der Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht mehr getrennt enthalten sind. Dies kann das Konvergenzverhalten infolge eines schlecht konditionierten Gleichungssystems negativ beeinflussen [47]. Darüber hinaus müssen die Randbedingungen in globalen kartesischen Koordinaten vorgegeben werden, was bei den im Bauingenieurwesen gängigen rotationssymmetrischen Strukturen im Allgemeinen zusätzliche Nebenbedingungen erfordert. Es ist daher zweckmäßig, die Verschiebungen nur für die betroffenen Koppelknoten in die Flächenkoordinaten einer beliebigen angrenzenden Teilstruktur zu transformieren. So wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix minimal beeinflusst und praxisrelevante Randbedingungen können direkt im Gleichungssystem berücksichtigt werden. Bei einer Transformation der Weggrößenfreiheitsgrade von $\bar{\mathbf{a}}_i$ nach \mathbf{a}_i über

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (2.46)$$

ist zu beachten, dass die in der Literatur häufig angegebene Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad t_{ij} = \cos(\mathbf{a}_i^T, \bar{\mathbf{a}}_j) = \frac{\langle \mathbf{a}_i^T, \bar{\mathbf{a}}_j \rangle}{\|\mathbf{a}_i^T\| \cdot \|\bar{\mathbf{a}}_j\|} \quad (2.47)$$

nur für eine Transformation zwischen orthonormalen Koordinatensystemen Gültigkeit besitzt. Dies ist für Rotationsschalen und eine Formulierung der Grundgleichungen in physikalischen Komponenten gegeben. Wird die Steifigkeitsmatrix hingegen mit tensoriellen Komponenten aufgebaut, sind die Längen der Basisvektoren zu berücksichtigen. Die Einträge der Transformationsmatrix t_{ij} folgen allgemeingültig aus der Lösung der drei linearen Gleichungssysteme

$$\bar{\mathbf{a}}_i = t_{1i}\mathbf{a}_1 + t_{2i}\mathbf{a}_2 + t_{3i}\mathbf{a}_3. \quad (2.48)$$

Rotationen

Für einen konsistenten Aufbau der Steifigkeitsmatrix einer Teilstruktur ist zusätzlich sicherzustellen, dass die Elementformulierung invariant gegenüber einer Drehung des lokalen Koordinatensystems ist. Dies setzt eine global definierte Drehrichtung für jeden Elementrand voraus. Die aus den Randtermen resultierenden Matrixeinträge für den gemeinsamen Rand zwei benachbarter Elemente unterscheiden sich für den Fall ungleicher Drehrichtungen lediglich in den Vorzeichen. Ob eine Transformation erforderlich ist, ergibt sich mit den nach außen gerichteten Randnormalenvektoren ν_α aus der Bedingung

$$\nu_1 \neq 0 : \quad \nu_1 > 0, \quad (2.49)$$

$$\nu_1 = 0 : \quad \nu_2 > 0. \quad (2.50)$$

Wird diese verletzt, ist das Vorzeichen der entsprechenden Matrixeinträge zu ändern [71]. Unabhängig von der Ausrichtung der lokalen Elementkoordinaten ist ein Vorzeichenwechsel der Verdrehungen im Allgemeinen auch bei gemeinsamen Elementrändern verzweigter Teilstrukturen zu überprüfen. Dies erfolgt auf Grundlage der tangentialen Randvektoren, da diese, im Gegensatz zu den Normalenvektoren, in der Tangentialebene aller angrenzenden Teilstrukturen liegen und einen direkten Vergleich ermöglichen.

2.5 Inkrementelle Formulierung und Diskretisierung

Für die Lösung der nichtlinearen Variationsaufgabe im Rahmen der FEM erfolgt die Überführung in eine inkrementelle Formulierung. Nachfolgend werden nur die für das weitere Verständnis wesentlichen Schritte aufgeführt. Eine detaillierte Herleitung ist unter anderem in [31] und [76] gezeigt. Da ein Unterschied zwischen der beschriebenen gemischten und gemischt-hybriden Formulierung bis zur Kondensation der Kraftgrößen nur durch die Zwischenrandgrößen vorhanden ist, sind alle Angaben bei Vernachlässigung von \tilde{w}_ν ohne Einschränkung für die gemischte Formulierung gültig. Mit den Vektoren der Zustandsgrößen und Flächenlasten

$$\mathbf{z} = [u_i \quad \tilde{w}_\nu \quad n^{\alpha\beta} \quad m^{\alpha\beta}]^T, \quad \mathbf{p} = [\bar{p}^i \quad 0 \quad \bar{\alpha}_{\alpha\beta} \quad \bar{\kappa}_{\alpha\beta}]^T \quad (2.51)$$

folgt das elastische Potential bei Vernachlässigung von Randlasten in vereinfachender Schreibweise

$$\Pi = \int_{\Omega} W(\mathbf{z}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{p} \, d\Omega. \quad (2.52)$$

Dabei umfasst das Integrationsgebiet Ω sowohl die Grenzflächen als auch das Elementgebiet. Mit einer vollständigen Taylor-Reihenentwicklung um den Ausgangszustand \mathbf{z}_0 folgt das inkrementelle Potential unter der Voraussetzung, dass der Ausgangszustand Gleichgewicht und Verträglichkeit erfüllt zu

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \Delta\mathbf{z}^T \left[\frac{\partial^2 W(\mathbf{z}_0)}{\partial^2 \mathbf{z}} \right] \Delta\mathbf{z} + \frac{1}{6} \Delta\mathbf{z}^T \left[\frac{\partial^3 W(\mathbf{z}_0)}{\partial^3 \mathbf{z}} \Delta\mathbf{z} \right] \Delta\mathbf{z} \right\} d\Omega \\ - \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}^T \Delta\mathbf{p} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Nach Berechnung der totalen Differentiale von $W(\mathbf{z})$ kann die in Gleichung 2.31 geforderte Variation ausgeführt werden.

Diskretisierung

Die Einteilung des elastischen Potentials in finite Elemente ist bereits mit der hybriden Erweiterung der gemischten Formulierung vorausgesetzt. Mit Hilfe der gegebenen Parameterdarstellung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta^\alpha)$ ist die zweidimensionale Schalenmittelfläche in Abhängigkeit der im allgemeinen gekrümmten Flächenkoordinaten Θ^α im \mathbb{R}^3 beschrieben. Die Geometrie eines über die Knotenkoordinaten Θ_k^α definierten rechteckigen finiten Elementes kann somit mit den für isoparametrische Elemente üblichen bilinearen Funktionen

$$\Theta^\alpha = \sum_{k=1}^4 N^k(\xi^\alpha) \Theta_k^\alpha = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_k^1 \xi^1) (1 + \xi_k^2 \xi^2) \Theta_k^\alpha, \quad \xi_k^\alpha = \pm 1 \quad (2.54)$$

in der von Θ^α aufgespannten Ebene beschrieben werden. Mit Berücksichtigung der Koordinatentransformation für isoparametrische Elemente erfolgt die numerische Integration mit Hilfe der Jacobi-Matrix \mathbf{J} und des Metriktensors $a_{\alpha\beta}$, s. [85].

Die differentielle Fläche bzw. die Bogenlänge in Abhängigkeit der lokalen Elementkoordinaten folgt mit

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \xi^\beta}, \quad a = \det(a_{\alpha\beta}) \quad (2.55)$$

zu

$$dA = \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2 = \sqrt{a} \det(\mathbf{J}) d\xi^1 d\xi^2, \quad (2.56)$$

$$ds = \sqrt{a_{\alpha\beta} \frac{d\Theta^\alpha}{dt} \frac{d\Theta^\beta}{dt}} dt \quad \text{mit} \quad dt = \begin{cases} \xi^1 & \text{für Ränder mit } \xi^2 = \pm 1 \\ \xi^2 & \text{für Ränder mit } \xi^1 = \pm 1 \end{cases}. \quad (2.57)$$

Ist die zu untersuchende Schale mit einer eindeutigen Parameterdarstellung geschlossen beschrieben, ist die in Kapitel 2.1.1 erläuterte Schalengeometrie an jedem Punkt bekannt. Durch deren vollständige Berücksichtigung im elastischen Potential wird die Schalengeometrie ohne Näherung abgebildet. Ist die Geometrie in Abhängigkeit der Flächenkoordinaten veränderlich, erhöht sich die Ordnung des Integranden, sodass die festgelegte Anzahl an Gaußpunkten auch bei regelmäßiger Elementgeometrie unter Umständen keine exakte Integration zulässt.

Mit den Vektoren der diskreten Knotengrößen

$$\mathbf{z} = \left[\underbrace{\hat{u}_i}_{\mathbf{u}} \quad \underbrace{\hat{w}_{(\nu)}}_{\mathbf{s}} \quad \underbrace{\hat{n}^{\alpha\beta} \quad \hat{m}^{\alpha\beta}}_{\mathbf{s}} \right]_k^T, \quad \mathbf{p} = \left[\underbrace{\hat{p}^i}_{\mathbf{f}} \quad 0 \quad \underbrace{\hat{\alpha}_{\alpha\beta} \quad \hat{\kappa}_{\alpha\beta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]^T \quad (2.58)$$

folgt nach Integration der Arbeitsanteile die erste Variation des elastischen Potentials in

Matrizenschreibweise

$$\delta \Delta \Pi = \delta \Delta \mathbf{z}^T \left\{ \underbrace{\left[\mathbf{A}^L + \mathbf{A}^{NL}(\mathbf{z}_0) \right]}_{\mathbf{A}(\mathbf{z}_0)} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}) \right\} \Delta \mathbf{z} - \Delta \mathbf{p} \Big\} = 0. \quad (2.59)$$

Dabei beschreibt $\mathbf{A}(\mathbf{z}_0)$ die Tangentensteifigkeit im Ausgangszustand, während die vollständige Summe der Teilmatrizen der Sekante vom Ausgangs- zum Nachbarzustand entspricht. Für die expliziten Inhalte der Matrizen einer gemischten Formulierung sei auf [20] verwiesen. Die dort angegebene Schalentheorie weicht geringfügig von der hier verwendeten 1. Approximation ab, das formale Vorgehen ist aber identisch. Durch Hinzufügen der aus den Verdrehungen $\tilde{w}_{(\nu)}$ resultierenden Anteile und einer anschließenden statischen Kondensation der Kraftgrößen, kann die Steifigkeitsmatrix des gemischt-hybriden Weggrößenelementes bestimmt werden.

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt iterativ mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens. Durch die damit erforderliche Linearisierung von Gleichung 2.59 entfällt lediglich der Faktor 1/2, sodass der Zuwachs für den k-ten Iterationsschritt im Lastinkrement $\Delta \mathbf{p}$ in einfacher Weise berechnet werden kann [31]

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_{k-1}) \right] \Delta \Delta \mathbf{z}_k = \underbrace{\Delta \mathbf{p} - \left[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_{k-1}) \right] \Delta \mathbf{z}_{k-1}}_{\mathbf{r}_k}, \quad (2.60)$$

$$\Delta \mathbf{z}_k = \Delta \mathbf{z}_{k-1} + \Delta \Delta \mathbf{z}_k. \quad (2.61)$$

2.6 Statische Kondensation

Die Elimination der nur im Elementgebiet definierten Kraftgrößen erfolgt durch statische Kondensation vor der Assemblierung des Gesamtgleichungssystems. Zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung ist der Iterationsindex des Newton-Raphson-Verfahrens nachfolgend nicht angegeben.

Mit einer Aufteilung von Gleichung 2.60 in Weggrößen- und Spannungsfreiwerte

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{us}^L \\ \mathbf{K}_{su}^L & \mathbf{K}_{ss}^L \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{us} \\ \mathbf{K}_{su} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{NL}(\mathbf{s}_0) & \mathbf{K}_{us}^{NL}(\mathbf{u}_0) \\ \mathbf{K}_{su}^{NL}(\mathbf{u}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{NL}(\Delta \mathbf{s}) & \mathbf{K}_{us}^{NL}(\Delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{K}_{su}^{NL}(\Delta \mathbf{u}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z})} \right\} \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_s \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

gelingt die Kondensation der Kraftgrößen über die zweite Zeile des Gleichungssystems

$$\Delta\Delta\mathbf{s} = (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} [(\mathbf{K}_{su} + \mathbf{K}_{su}^{NL}) \Delta\Delta\mathbf{u} + \mathbf{r}_s] . \quad (2.63)$$

Es verbleibt das linearisierte Gleichungssystem zur Berechnung der Weggrößenfreiwerte $\Delta\Delta\mathbf{u}$

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2] \Delta\Delta\mathbf{u} = \mathbf{r}_u + (\mathbf{K}_{us} + \mathbf{K}_{us}^{NL}) \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{r}_s \quad (2.64)$$

mit

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{s}_0) = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{us} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su} ,$$

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_0, \Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{s}) = \mathbf{K}_{uu}^{NL} + \mathbf{K}_{us} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su}^{NL} + \mathbf{K}_{us}^{NL} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su} ,$$

$$\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}_{us}^{NL} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su}^{NL} .$$

Die bei der gemischten Formulierung noch explizit vorhandenen diskreten Spannungsfreiwerte sind nach dem Ablösevorgang nicht mehr Teil des Lösungsvektors und müssen mit Gleichung 2.63 in einer Nachlaufrechnung ermittelt werden.

2.7 Elementeigenschaften

Die Güte finiter Elemente ist im Wesentlichen durch das Konvergenzverhalten bei einer Netzverfeinerung, die Ausprägung unterschiedlicher Locking-Effekte sowie die Beeinflussung der Ergebnisse durch verzerrte Elementgeometrien charakterisiert. Nachfolgend werden die Eigenschaften des vorgestellten gemischt-hybriden Schalenelementes für unterschiedliche Modifikationen der Ansatzfunktionen anhand geeigneter Beispiele untersucht. Um eine einfachere Bewertung zu ermöglichen, erfolgen alle Betrachtungen unter der Annahme geometrisch linearen Tragverhaltens. Eine Übersicht bekannter Locking-Effekte bei verschiedenen Elementformulierungen ist in [35] gegeben. Locking ist grundsätzlich durch die Identifikation eines kritischen Parameters charakterisiert, mit welchem eine zunehmende Versteifung der Elemente assoziiert ist.

2.7.1 Membrantragverhalten ebener Elemente

Schub-Locking

Abbildung 2.5 zeigt einen reinen Biegezustand und die Abbildung durch ein finites Scheibenelement für eine bilineare Approximation der Verschiebungen. Der gekrümmte Rand kann mit den Ansatzfunktionen nicht beschrieben werden infolgedessen parasitäre Schub-

verzerrungen und -spannungen auftreten. Der kritische Parameter ist mit dem Seitenverhältnis a/b beschrieben. Nimmt dieses zu, steigt der Anteil der unphysikalischen Verzerrungsenergie an der Gesamtverzerrungsenergie und die tatsächlichen Verschiebungen werden durch die Elemente zunehmend unterschätzt. Dieser als *Schub-Locking* bezeichnete Effekt kann für ungünstige Elementgeometrien infolge sehr langsamer Konvergenz bei einer Netzverfeinerung zu unbrauchbaren Ergebnissen führen [35].

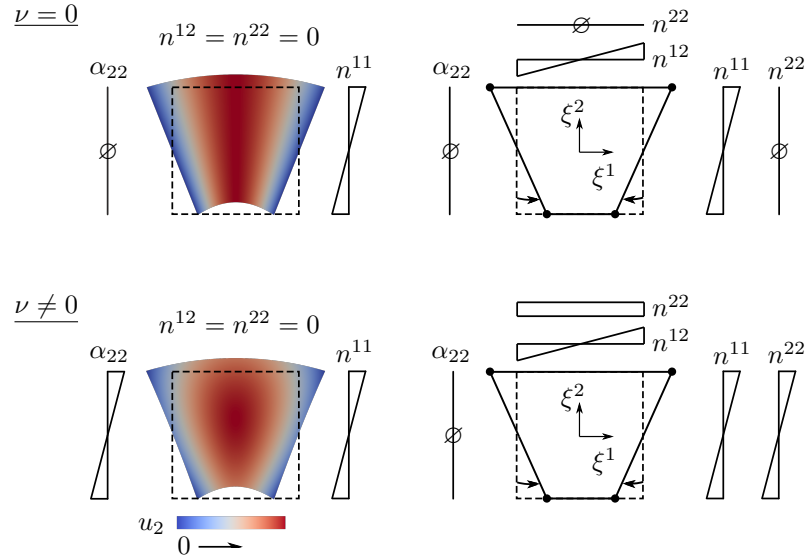


Abbildung 2.5: Abbildung eines reinen Biegezustandes durch bilineare Ansatzfunktionen [35]

Um eine Abgrenzung zu dem bei schubsteifen Plattenelementen auftretenden Locking-effekt infolge parasitärer Schubverzerrungen in Dickenrichtung zu ermöglichen, ist für den hier beschriebenen Versteifungseffekt auch die Bezeichnung *Inplane-Shear-Locking* gebräuchlich.

Die Identifikation von Schub-Locking für unterschiedliche Elementvarianten gelingt über eine Eigenwertanalyse der Steifigkeitsmatrizen. In Abbildung 2.6 sind die Eigenwerte der vorgestellten gemischt-hybriden Formulierung mit bilinearen Ansätzen bei vollständiger ($12\hat{n}$) und selektiv reduzierter Integration ($12\hat{n}$ -SRI) sowie abgestimmten Ansätzen ($5\hat{n}$) der klassischen Weggrößenformulierung (Q1) gegenüber gestellt. Die hinsichtlich Schub-Locking kritischen Biegemoden sind durch die dritte und fünfte Eigenform beschrieben. Für das betrachtete nicht verzerrte Element ist die gemischt-hybride Formulierung bei vollständiger Integration der klassischen Weggrößenformulierung äquivalent. Dabei kennzeichnen die erhöhten Eigenwerte λ_3 und λ_5 den Versteifungseffekt, welcher mit steigender Schlankheit a/b zunehmend stärker ausgeprägt ist.

Bei Anwendung der selektiv reduzierten Integration werden die Schubanteile mit nur einem Gaußpunkt in der Elementmitte genau dort ausgewertet, wo die parasitären Schubkräfte verschwinden. Der Locking-Effekt ist damit nicht vorhanden und die Eigenwerte entsprechen den analytischen Steifigkeiten. Die konstante Approximation von n^{12} im Rahmen abgestimmter Ansätze (s. Gleichung 2.40) erzielt den gleichen Effekt, da ein ver-

änderlicher Verlauf der Schubspannungen nicht abgebildet werden kann und sich diese im gesamten Element zu Null ergeben.

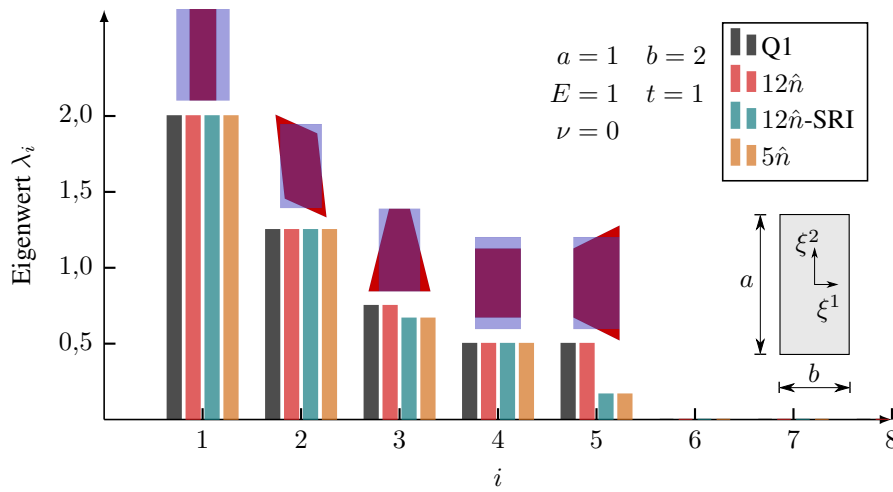


Abbildung 2.6: Eigenwerte und Eigenformen unterschiedlicher Elementvarianten

In Tabelle 2.2 sind zusätzlich die Eigenwerte für $\nu = 0,499$ sowie für ein gegenüber dem globalen Koordinatensystem um $\vartheta = 20^\circ$ gedrehtes Element angegeben. Durch den Einfluss der Querdehnung treten Unterschiede zwischen einer selektiv reduzierten Integration und der Technik abgestimmter Ansätze auf. Während alle Eigenwerte für das $12\hat{n}$ -SRI-Element durch die Querdehnzahl beeinflusst sind, ist dies bei den Biegemoden 3 und 5 für das Element mit abgestimmten Ansätzen nicht gegeben.

Tabelle 2.2: Eigenwerte der untersuchten Elementvarianten

i	$\nu = 0/\vartheta = 0^\circ$				$\nu = 0,499/\vartheta = 0^\circ$			$\nu = 0/\vartheta = 20^\circ$		
	Q1	$12\hat{n}$	$12\hat{n}$ -SRI	$5\hat{n}$	$12\hat{n}$	$12\hat{n}$ -SRI	$5\hat{n}$	$12\hat{n}$	$12\hat{n}$ -SRI	$5\hat{n}$
1	2.000	2.000	2.000	2.000	2.864	2.864	2.864	2.000	2.000	2.000
2	1.250	1.250	1.250	1.250	0.834	0.834	0.834	1.250	1.250	1.250
3	0.750	0.750	0.667	0.667	0.943	0.888	0.667	0.750	0.608	0.667
4	0.500	0.500	0.500	0.500	0.465	0.465	0.465	0.500	0.500	0.500
5	0.500	0.500	0.167	0.167	0.444	0.222	0.167	0.500	0.225	0.167
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Sofern die Querdehnung nicht behindert wird, stellt sich für den Biegezustand mit der Querdehnzahl $\nu = -\alpha_{22}/\alpha_{11}$ ein in ξ^2 -Richtung linearer Verlauf von α_{22} ein. Aus der Werkstoffgleichung des ebenen Spannungszustandes wird ersichtlich, dass die Steifigkeit für diesen Fall nicht durch die Querdehnzahl beeinflusst ist

$$n^{11} = \frac{Et}{1-\nu^2} (\alpha_{11} + \nu\alpha_{22}) = \frac{Et}{1-\nu^2} (1-\nu^2) \cdot \alpha_{11} = Et \cdot \alpha_{11}, \quad n^{22} = 0. \quad (2.65)$$

Der lineare Verzerrungs- bzw. quadratische Verschiebungsverlauf kann durch die bilinearen Verschiebungsansätze innerhalb eines Elementes jedoch nicht abgebildet werden und es stellt sich infolge $\alpha_{22} = u_{2,2} = 0$ ein linearer Verlauf von n^{22} in ξ^2 -Richtung ein. Dieser wird durch die konstante Approximation von $n^{\alpha\alpha}$ in der jeweiligen Wirkungsrichtung im Rahmen abgestimmter Ansätze lediglich im Mittel abgebildet. Aus der Biegeeigenform zu λ_3 resultiert damit im gesamten Element $n^{22} = 0$ und der Eigenwert beschreibt den analytischen Wert der Steifigkeit. Diese Überlegung gilt äquivalent für den zweiten Biegezustand und wird durch die angegebenen Eigenwerte über den Zusammenhang

$$12\hat{n}\text{-SRI: } \frac{\lambda_{3,5}^{\nu=0}}{1-\nu^2} = \lambda_{3,5}^{\nu \neq 0}, \quad 5\hat{n}: \lambda_{3,5}^{\nu=0} = \lambda_{3,5}^{\nu \neq 0}$$

bestätigt. Demnach bietet die Wahl abgestimmter Ansätze für die Kraftgrößen neben der Vermeidung von Schub-Locking den Vorteil einer besseren Approximation reiner Biegezustände für $\nu \neq 0$.

Die Eigenwerte für $\vartheta = 20^\circ$ zeigen, dass das Element bei vollständiger Integration und abgestimmten Ansätzen drehinvariant ist. Bei einer Anwendung der selektiv reduzierten Integration ist dies nur für Drehungen um ein Vielfaches von 90° gegeben. Eine vollständige Drehinvarianz kann jedoch, äquivalent zum $5\hat{n}$ -Element, durch die Transformationsvorschrift nach Gleichung 2.41 sichergestellt werden.

Volumetrisches Locking

Bei Scheiben- und Kontinuums-elementen kann *volumetrisches Locking* auftreten. Der kritische Parameter ist mit dem Kompressionsmodul $K = E/(3-6\nu)$ beschrieben und führt mit einer Annäherung an inkompressibles Materialverhalten mit $\nu \rightarrow 0,5$ zu einer zunehmenden Versteifung der Elemente. Für Scheibenelemente ergeben sich Dehnungszustände ohne Volumenänderung nur für den ebenen Verzerrungszustand, bei welchem die Dehnungen senkrecht zur Mittelfläche a priori zu Null gesetzt werden. Unter dieser Voraussetzung weist das gemischt-hybride Element mit bilinearen Ansatzfunktionen für alle Unbekannten volumetrisches Locking auf. Die bei Schub-Locking angewandte Methode der selektiv reduzierten Integration ist nicht geeignet, um das Versteifen zu verhindern, da dieses nicht durch parasitäre Verzerrungen, sondern durch einen nicht abbildbaren veränderlichen Verzerrungsverlauf begründet ist [35]. Volumetrisches Locking kann durch die Verwendung abgestimmter Ansätze vermieden werden, tritt jedoch bei Annahme eines ebenen Spannungszustandes grundsätzlich nicht auf. Somit sind für die Membrananteile der beschriebenen Schalentheorie keine weiteren Untersuchungen erforderlich.

Trapezodial-Locking

Ein weiterer geometrischer Locking-Effekt ist bei trapezförmigen Scheibenelementen zu beobachten und durch parasitäre Verzerrungen in Querrichtung bei reinen Biegezuständen

charakterisiert. Mit dem Ziel *Trapezoidal-Locking* eindeutig zu identifizieren und einen kombinierten Einfluss aus Locking und Netzverzerrung auszuschließen, sind Strukturen zu betrachten, bei welchen aus einer regulären Diskretisierung trapezförmige Elemente resultieren [35]. Abbildung 2.7 zeigt einen entsprechenden einseitig eingespannten Kreisbogen unter Biegebeanspruchung sowie die Verschiebungen von Punkt a in Θ^1 -Richtung für unterschiedliche Schlankheiten r/b . Die analytische Lösung für u_1 ist durch die Normierung der Belastung unabhängig von der Schlankheit, welche den kritischen Parameter bezüglich des Anteils parasitärer Verzerrungsenergie an der Gesamtenergie darstellt [35]. Durch die Abweichung von einer rechteckigen Elementgeometrie ist ein Einfluss der alternativen Koordinaten nach YUAN et al. [84] (Gleichung 2.43) zu erwarten. Das zugehörige Element ist mit $5\hat{n}$ -Y bezeichnet.

Eine Möglichkeit den Einfluss parasitärer Verzerrungen und damit auch den Versteifungseffekt abzuschwächen, bietet die Skalierung ausgewählter Anteile der Steifigkeitsmatrix. SZE [65] schlägt die Skalierung der im Element nicht konstanten Verzerrungsanteile über einen empirisch ermittelten Faktor κ vor. Der nominelle Wert ist vom betrachteten Tragwerk und der gewünschten Genauigkeit abhängig und wird für die nachfolgenden Untersuchungen mit $\kappa = 50$ gewählt. Die Skalierung ist durch den Zusatz κ in der Elementbezeichnung gekennzeichnet.

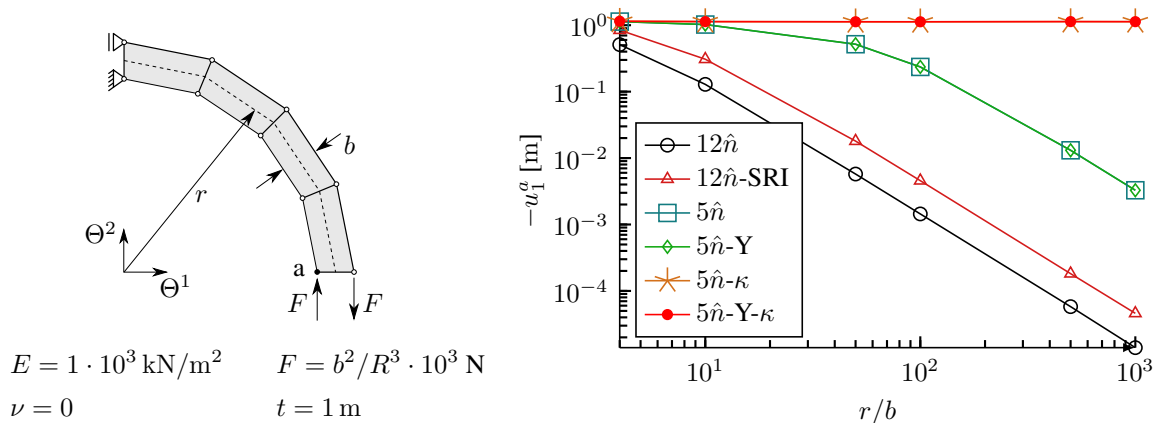


Abbildung 2.7: Trapezoidal-Locking bei Scheibenelementen (Skalierungsfaktor $\kappa = 50$)

Die berechneten Verschiebungen lassen eine Versteifung des Systems für alle Elemente ohne Skalierung erkennen, wenngleich die abgestimmten Ansätze einer vollständig bilinearen Approximation der Membrankräfte überlegen sind. Es ist zu beachten, dass für das $12\hat{n}$ -Element eine Kombination aus Trapezoidal- und Schub-Locking auftritt. Ein geringer Einfluss der alternativen lokalen Koordinaten ist vorhanden, im Rahmen der Zeichengenauigkeit jedoch nicht zu erkennen. Durch die Anwendung der Skalierung wird der Versteifungseffekt deutlich reduziert, aber nicht vollständig vermieden.

In Abbildung 2.8 sind die Ergebnisse einer Eigenwertanalyse für eine trapezförmige Elementgeometrie dargestellt. Das Tragverhalten des untersuchten Kreisbogens ist primär

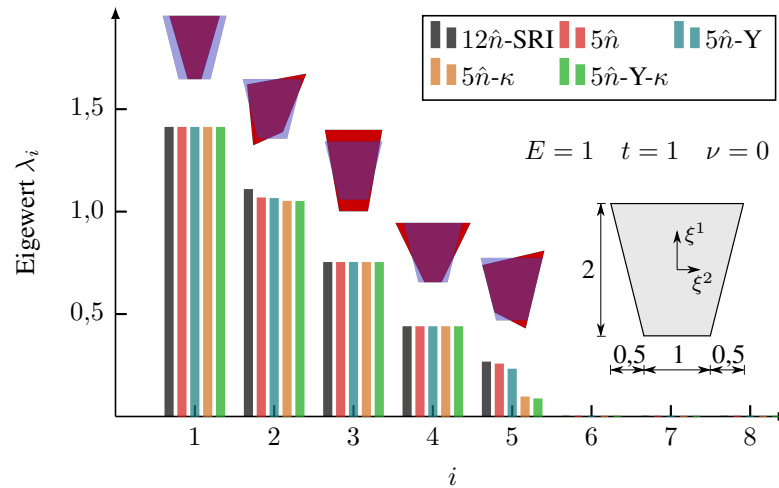


Abbildung 2.8: Eigenwerte und -vektoren für eine trapezförmige Elementgeometrie

durch den Biegezustand des vierten Eigenvektors beschrieben (es sind stellvertretend die Eigenvektoren für $5\hat{n}$ gezeigt). Die zugehörigen Steifigkeiten in Form der Eigenwerte sind für alle Elementvarianten identisch. Infolge der trapezförmigen Elementgeometrie werden jedoch ebenfalls die zweite und fünfte Eigenform angesprochen und tragen zu den parasitären Verzerrungen des Locking-Effektes unterschiedlich stark bei. Der wesentliche Anteil entfällt dabei auf den transversalen Biegezustand [65], hier beschrieben durch das fünfte Eigenpaar. Der geringfügige Unterschied in den berechneten Verschiebungen für die Elemente $5\hat{n}$ und $5\hat{n}$ -Y ist durch die relativ kleinen Differenzen der Eigenwerte begründet. Die Skalierung der nicht konstanten Verzerrungsanteile führt hingegen zu einer deutlichen Reduktion der Eigenwerte und einer entsprechenden Abnahme des Versteifungseffektes. Mit steigendem Faktor κ wird die transversale Biegesteifigkeit zunehmend unterdrückt. Für eine quantitative Angabe der Eigenwerte wird auf Tabelle 2.3 verwiesen.

Tabelle 2.3: Eigenwerte für trapezförmige Scheibenelemente

i	$12\hat{n}$ -SRI	$5\hat{n}$	$5\hat{n}$ - κ	$5\hat{n}$ -Y	$5\hat{n}$ -Y- κ
1	1.4096	1.4096	1.4096	1.4096	1.4096
2	1.1062	1.0652	1.0622	1.0488	1.0480
3	0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	0.7500
4	0.4366	0.4366	0.4366	0.4366	0.4366
5	0.2640	0.2543	0.2295	0.0936	0.0843
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Verzerrte Elementgeometrie

Das Lösungsverhalten der vorgestellten Elementvarianten bei verzerrter Geometrie wird mit dem in Abbildung 2.9 dargestellten Kragarm unter Biegebeanspruchung untersucht. Die in Abhängigkeit des Verzerrungsparameters d/ℓ berechneten Verschiebungen u_2 von

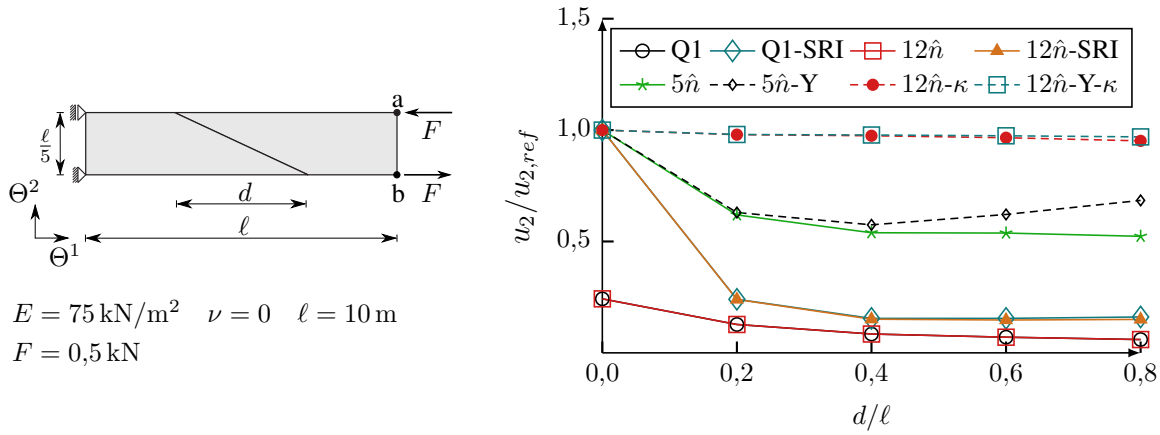


Abbildung 2.9: Einfluss einer verzerrten Elementgeometrie

Punkt a sind der analytischen Lösung $u_{2,ref}$ unter Annahme der Bernoulli-Hypothesen gegenübergestellt. Neben den bisher betrachteten Elementen ist eine reduzierte Integration der Schubanteile mit Q1-SRI auch für das klassische Weggrößenelement betrachtet. Während die Ergebnisse für die gemischt-hybride Formulierung $12\hat{n}$ und das vollständig integrierte Weggrößenelement Q1 identisch sind, ergeben sich geringfügige Abweichungen zwischen den modifizierten Varianten $12\hat{n}$ -SRI und Q1-SRI. Dies wird durch einen Vergleich der Eigenwerte für eine verzerrte Elementgeometrie bestätigt.

Aufgrund der unterschiedlichen Ableitungsordnungen in den zugrundeliegenden Funktionalen hat die reduzierte Integration nicht den gleichen Einfluss in beiden Formulierungen. Bei rechtwinkligen Elementen sind hingegen auch die reduziert integrierten Elementmatrizen identisch. Dass die Verschiebungen für die Elemente Q1 und $12\hat{n}$ mit einem Fehler von 76% bereits für nicht verzerrte Elemente vergleichsweise ungenau ermittelt werden ist durch Schub-Locking begründet. Alle anderen Elementvarianten bilden die analytische Lösung für diesen Fall hingegen exakt ab.

Mit zunehmendem Verhältnis d/ℓ zeigt sich, dass die Wahl abgestimmter Ansatzfunktionen für die Kraftgrößen zu einer deutlichen Verbesserung der Näherungslösung für verzerrte Elementgeometrien führt. Eine weitere Optimierung des Elementverhaltens ist durch die Verwendung der lokalen Koordinaten nach Gleichung 2.43 möglich, s. [84], [65]. Für die hinsichtlich Trapezoidal-Locking optimierten Elemente ist der Skalierungsfaktor mit $\kappa = 50$ gewählt. Es sei darauf hingewiesen, dass die nicht dargestellten Verschiebungen von Punkt b auch für diese Elemente mit $u_{2,b} = 1,40$ bei $d/\ell = 0,8$ deutlich von der exakten Lösung abweichen. Der Fehler ist für den Mittelwert der Verschiebungen in a und b jedoch geringer als bei Elementen ohne Skalierung.

Die Empfindlichkeit eines Elementes gegenüber einer verzerrten Geometrie ist nicht als Locking zu bezeichnen, da dies die uneingeschränkte Abhängigkeit der Lösung von einem kritischen Parameter voraussetzt. Für den Fall $d/\ell \rightarrow 1$ wird die maximale Elementverzerrung angenähert, bis im Grenzfall eine dreieckige Geometrie vorliegt. Die Güte der Lösung nimmt jedoch nicht kontinuierlich ab, sondern nähert sich einem Grenzwert [35].

Membran-Patchtest

Die Fähigkeit finiter Elemente bei unregelmäßiger Geometrie einen konstanten Verzerrungszustand korrekt abzubilden, kann mit dem von MACNEAL und HARDER [40] vorgestellten Patchtest überprüft werden. Die Diskretisierung ist in Abbildung 2.10 angegeben. Bei Vorgabe der Wegrandbedingungen

$$u_1 = 10^{-3}(\Theta^1 + \Theta^2/2), \quad u_2 = 10^{-3}(\Theta^2 + \Theta^1/2)$$

muss sich im gesamten Modell ein konstantes Spannungsfeld einstellen. Von den untersuchten gemischt-hybriden Elementen erfüllen mit Ausnahme von $12\hat{n}$ -SRI alle Varianten den Patchtest. Für das Weggrößenelement Q1 ist der Patchtest unabhängig von einer selektiv reduzierten Integration erfüllt.

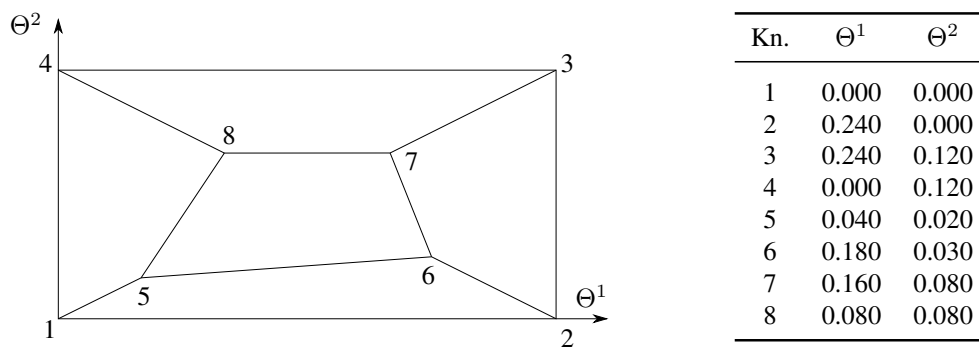


Abbildung 2.10: Membran-Patchtest für ebene Elemente [40]

2.7.2 Biegetragverhalten ebener Elemente

Für die Bewertung von Plattenelementen ist die Güte der Näherungslösung bei regulärer und verzerrter Elementgeometrie sowie der Einfluss des *Querschub-Lockings* maßgebend [35]. Mit der hier zugrunde gelegten Kirchhoff-Love-Theorie und der daraus folgenden Vernachlässigung von Schubverzerrungen sind die vorgestellten Elemente jedoch nicht von dem Versteifungseffekt betroffen. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich daher lediglich auf den Einfluss der Elementgeometrie.

Biege-Patchtest

Der in Abbildung 2.10 gezeigte Patchtest kann mit Vorgabe eines konstanten Krümmungszustandes ebenfalls für eine Bewertung von Plattenelementen verwendet werden. Diese müssen für die Wegrandbedingungen

$$u_3 = -10^{-3}((\Theta^1)^2 + \Theta^1\Theta^2 + (\Theta^2)^2)/2$$

$$w_1 = 10^{-3}(\Theta^1 + \Theta^2/2), \quad w_2 = 10^{-3}(\Theta^1/2 + \Theta^2)$$

einen konstanten Spannungszustand abbilden, um den Patchtest zu bestehen. Da die von SZE und CHOW [67] entwickelten lokalen Koordinaten (Gleichung 2.45) das Elementverhalten in Abhängigkeit des Momentenansatzes auch bei regulärem Netz beeinflussen können, wird der Patchtest zusätzlich für eine regelmäßige Diskretisierung der Platte mit vier identischen Elementen ausgewertet. Die Ergebnisse sind, zusammen mit denen des im nächsten Abschnittes beschriebenen Plattentragwerkes, in Tabelle 2.4 zusammengefasst. Der Zusatz *SC* in der Elementbezeichnung bezieht sich auf die alternativen lokalen Koordinaten.

Tabelle 2.4: Prozentuale Abweichungen von der Referenzlösung

Ansatz		u_3^a	m_a^{11}	m_a^{22}	m_b^{12}	Patchtest		Hinweis
u_3	$m^{\alpha\beta}$					reg.	verz.	
lin.	$9\hat{m}$ -I	1.425	5.420	-6.719	-11.311			[44]
	$9\hat{m}$ -I-SC	-0.923	12.491	37.700	-16.656	✓	✗	
	$9\hat{m}$ -II	0.518	10.734	-7.142	-0.756			[63], gek.
	$9\hat{m}$ -II-SC	-1.194	25.389	-13.979	33.652	✓	✗	
	$11\hat{m}$	-1.024	8.144	-17.000	28.832			[44]
	$11\hat{m}$ -SC	-2.716	11.926	37.094	29.798	✓	✗	
	$12\hat{m}$	-1.065	8.541	-17.074	31.477			[67]
	$12\hat{m}$ -SC	-2.885	15.943	36.707	28.479	✓	✗	
serend.	13β -I	-0.212	4.320	5.460	2.990			[44], gek.
	$13\hat{m}$ -I-SC	-0.125	7.143	5.086	6.636	✓	✗	
	$13\hat{m}$ -II	-0.605	8.188	-4.337	6.542			[63], gek.
	$13\hat{m}$ -II-SC	-0.598	10.449	-6.250	3.834	✓	✓	
	$13\hat{m}$ -III	1.060	3.011	4.065	7.055			[63], gek.
	$13\hat{m}$ -III-SC	0.505	6.818	0.733	14.234	✓	✓	
quad.	$14\hat{m}$ -I	0.281	4.913	0.379	8.480			gek.
	$14\hat{m}$ -I-SC	0.133	7.335	0.282	-34.239	✓	✓	
	$14\hat{m}$ -II	1.811	-1.439	4.440	11.395			gek.
	$14\hat{m}$ -II-SC	0.775	2.620	-0.914	8.078	✓	✓	
	$18\hat{m}$	0.058	6.133	0.934	15.209			gek.
	$18\hat{m}$ -SC	-0.043	7.726	2.333	13.204	✓	✓	
HSQK1		-0.632	2.707	1.168	0.419	✓	✓	[67]

Für eine reguläre Geometrie sind alle Elementvarianten in der Lage den konstanten Krümmungszustand abzubilden. Gleichzeitig zeigt eine Eigenwertanalyse, dass die Steifigkeiten durch die Koordinaten $\xi^{\alpha\star}$ für Elemente ohne gekoppelte Monome sowie für $13\hat{m}$ -II nicht beeinflusst sind. Bei den verbleibenden Elementen $9\hat{m}$ -II, $13\hat{m}$ -III und $14\hat{m}$ -II ist für allgemeine rechtwinklige Geometrien ein Unterschied in den Eigenwerten vorhanden. Dieser verschwindet jedoch bei quadratischer Elementgeometrie, da für diesen Fall die Steifigkeit durch die beide Koordinatensysteme äquivalent abgebildet wird, s. Kapitel 2.3.3. Darüber hinaus sind die Eigenwerte für $9\hat{m}$ -I, $11\hat{m}$ und $12\hat{m}$ vollständig identisch. Die höhere Approximationsordnung des Torsionsmomentes hat somit keine Auswirkungen. Dies wird auch durch Betrachtung der Momententerme in Gleichung 2.37 deutlich. Da in den Integranden der Plattentheorie in jeder Richtung eine Feldgröße zu differenzie-

ren ist, verschwinden die Matrixeinträge für $\xi^1 \xi^2$ und die aus den Monomen ξ^1 und ξ^2 folgenden Anteile des Flächen- und Randintegrals heben sich gegenseitig auf. Bei verzerrter Geometrie kann der Patchtest durch die linearen Ansätze für u_3 nicht erfüllt werden.

Die Serendipity-Elemente bestehen den Patchtest nur für die gekoppelten Momentenansätze in Kombination mit den $\xi^{\alpha*}$ -Koordinaten. Mit einem quadratischen Lagrange-Ansatz für u_3 ist dies unabhängig von den lokalen Koordinaten für die Minimalansätze $14\hat{m}$ -I/II sowie den vollständig quadratischen Ansatz $18\hat{m}$ gegeben. Bedingt durch die nicht rechtwinklige Elementgeometrie hat die Modifikation der lokalen Koordinaten bei allen Varianten eine Veränderung der Eigenwerte zur Folge. Die erforderlichen Starrkörpermoden werden für alle untersuchten Fälle abgebildet.

Verzerrte Elementgeometrie

Die Bewertung der Empfindlichkeit gegenüber einer Netzverzerrung erfolgt durch Berechnung der in Abbildung 2.11 dargestellten allseitig gelenkig gelagerten Quadratplatte unter einer gleichmäßiger Flächenlast. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften ist eine Diskretisierung mit 16 Elementen pro Plattenquadrant gewählt. Bei Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen wird das Netz auf 2×2 Elemente reduziert, um eine ähnliche Anzahl an globalen Freiheitsgraden zu erhalten.

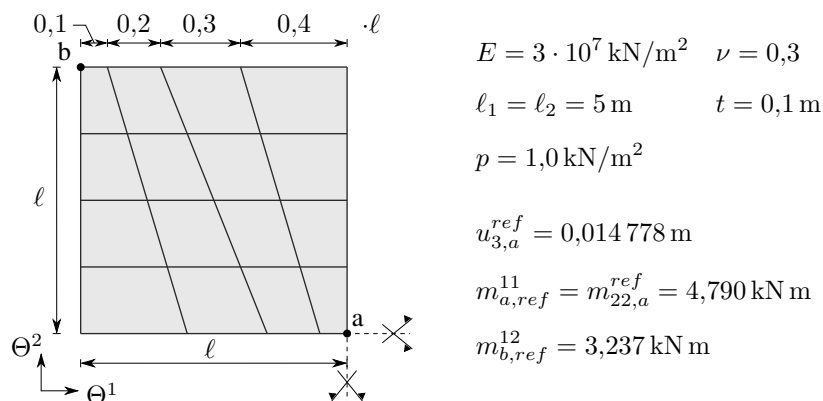


Abbildung 2.11: Gelenkig gelagerter Plattenquadrant mit verzerrtem Netz

Tabelle 2.4 fasst die relativen Fehler der Verschiebungs- und Kraftgrößen in Plattenmitte (Punkt a) und des Torsionsmomentes in der Ecke (Punkt b) zusammen. Die Referenzlösung folgt aus einer regelmäßigen Diskretisierung mit 900 Elementen. Ein Vergleich der Verschiebungen mit der analytischen Näherungslösung nach TIMOSHENKO und WOINOWSKY-KRIEGER [69] bestätigt eine ausreichende Genauigkeit.

Bei bilinearer Approximation der Verschiebungen werden die Momente im Mittel für den gekoppelten Ansatz mit neun Freiheitsgraden $9\hat{m}$ -II und natürliche Koordinaten am besten angenähert. Gleiches gilt für die Verschiebungen u_3^a . Die Abweichungen der Momente nehmen mit Ausnahme von m^{12} bei $12\hat{m}$ -SC mit den modifizierten Koordinaten zu.

Für Elemente mit einem quadratischen Lagrange- bzw. Serendipity-Ansatz für u_3 wird mit den $\xi^{\alpha\star}$ -Koordinaten eine bessere Approximation der Verschiebung erzielt, wenngleich das Ergebnis für die Momente weniger eindeutig ausfällt. Tendenziell werden letztere jedoch wie bei den in u_3 bilinearen Elementen mit den natürlichen Koordinaten besser abgebildet. Als Vergleichsgrößen sind zusätzlich die Ergebnisse für das hybride Spannungselement HSQK1 nach SZE und CHOW [67] angegeben. Sowohl die Verschiebungen als auch die Momente werden vergleichsweise gut approximiert und nur vereinzelt führen andere Elementvarianten zu geringeren Abweichungen. Wenngleich sich für den ebenen Fall eine Überlegenheit des hybriden Spannungselementes abzeichnet, lässt sich dieses nicht ohne Weiteres auf gekrümmte Schalenträgerwerke übertragen, da das homogene Gleichgewicht durch die Ansatzfunktionen erfüllt sein muss. Die schwache Formulierung des Gleichgewichtes im Rahmen der gemischt-hybriden Elemente erlaubt hingegen auch für eine räumlich gekrümmte Geometrie die Verwendung einfacher Polynomansätze.

Eine Konvergenzuntersuchung für eine regelmäßige Diskretisierung mit nicht verzerrten Elementen ist in Abbildung 2.12 und 2.13 dargestellt. Es sind lediglich die Ergebnisse für natürliche Koordinaten angegeben, da bei quadratischer Elementgeometrie kein Einfluss der $\xi^{\alpha\star}$ -Koordinaten vorhanden ist. In der Anzahl der Freiheitsgrade n_{Fhg} sind sowohl Verschiebungen als auch Verdrehungen berücksichtigt.

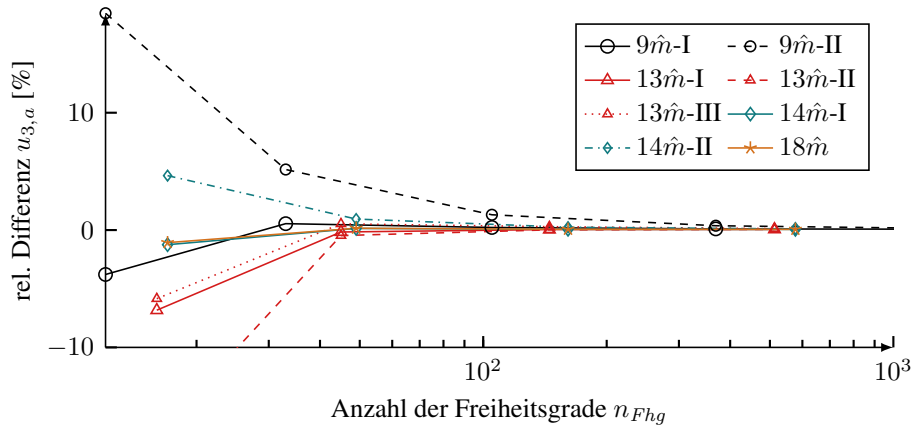


Abbildung 2.12: Konvergenz der Verschiebung u_3^a in Plattenmitte

Für die Elemente mit neun bzw. vierzehn Momentenfreiheitsgraden folgt die schnellste Konvergenz von u_3^a bei Verwendung nicht gekoppelter Monome, wobei die quadratische der linearen Approximation von u_3 leicht überlegen ist. Gleichzeitig werden die Momente $m_a^{\alpha\alpha}$ mit diesen Elementvarianten schlechter angenähert. Der vollständige Ansatz 18 \hat{m} überschreitet die zur Gewährleistung der Elementstabilität geforderte Mindestanzahl von vierzehn Freiheitsgraden und führt für die Verschiebung zu ähnlichen und für das Moment zu besseren Ergebnissen als 14 \hat{m} -I. Ein grundsätzlicher Vorteil einer höheren Ansatzordnung für u_3 ist nicht erkennbar. Vielmehr zeigt die vergleichsweise einfache Elementformulierung 9 \hat{m} -I unter Berücksichtigung beider Feldgrößen gute Konvergenzeigenschaften.

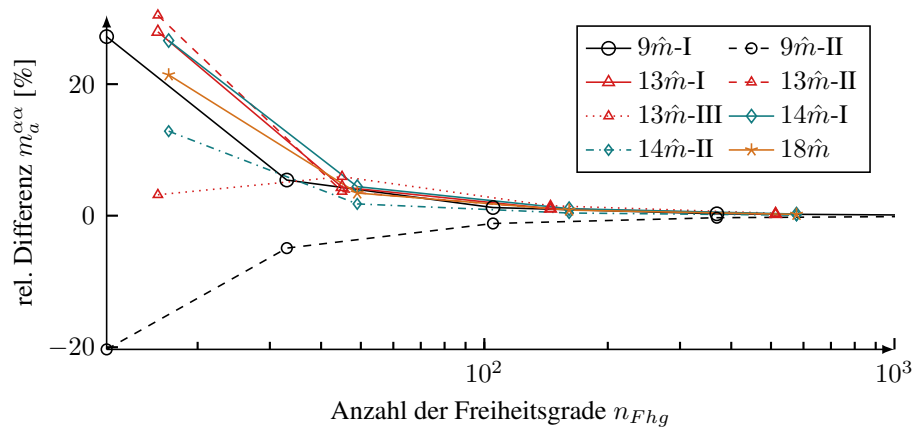


Abbildung 2.13: Konvergenz der Momente $m_a^{\alpha\alpha}$ in Plattenmitte

2.7.3 Gekrümmte Elemente

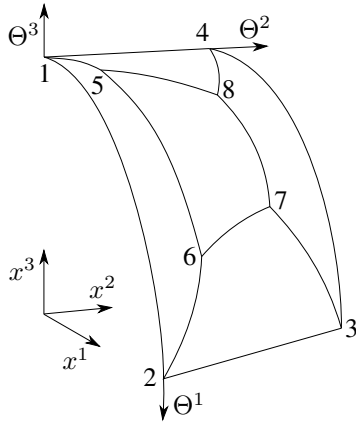
Aus dem elastischen Potential in Gleichung 2.37 wird ersichtlich, dass durch die Krümmung von Schalenträgwerken eine Verknüpfung der bei ebenen Strukturen noch getrennten Membran- und Biegegrößen folgt. Die Approximation der unbekannten Weg- und Kraftgrößen erfolgt entsprechend durch Kombination der für ebene Elemente vorgestellten Ansatzvarianten. Die daraus resultierenden neue Aspekte des Elementverhaltens werden nachfolgend diskutiert.

Membran-Patchtest

Durch Übertragen des für ebene Elemente beschriebenen Patchtestes auf ein Zylindersegment wird die exakte Abbildung der Schalengeometrie verifiziert. Dabei sind die Knoten im dreidimensionalen Raum derart positioniert, dass verglichen mit dem ebenen Patchtest identische Flächenkoordinaten vorliegen, s. Abbildung 2.14. Das Zylindersegment ist in Ringrichtung membrangerecht gelagert und mit einer radialen Flächenlast belastet. Die berechneten Spannungen entsprechen für alle in Tabelle 2.5 angegebenen Ansatzvarianten der analytischen Lösung. Dies ist bei einer Modellierung mit degenerierten oder volumetrischen Schalelementen, welchen eine isoparametrische Approximation der Geometrie zugrunde liegt, nicht zu erwarten, da die Schalengeometrie nicht exakt erfasst wird [10].

Eigenwertanalyse

Ziel der nachfolgenden Eigenwertanalyse ist es zu überprüfen, ob die Elemente in der Lage sind, alle erforderlichen Starrkörperverschiebungen spannungsfrei abzubilden. Sind weniger als sechs Null-Eigenwerte vorhanden, ist dies ein Indikator für Versteifungseffekte, welche mit dem Auftreten parasitärer Verzerrungen und Spannungen einhergehen. Werden hingegen mehr als sechs Eigenwerte zu Null ermittelt, kann das Elementverhalten dahingehend negativ beeinflusst sein, dass unphysikalische kinematische Zustände auftreten.



Kn	Θ^1	Θ^2	x^1	x^2	x^3
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.153
2	1.571	0.000	0.153	0.000	0.000
3	1.571	0.120	0.153	0.120	0.000
4	0.000	0.120	0.000	0.120	0.153
5	0.262	0.020	0.040	0.020	0.148
6	1.178	0.030	0.141	0.030	0.058
7	1.047	0.080	0.132	0.080	0.076
8	0.524	0.080	0.076	0.080	0.132

Abbildung 2.14: Membran-Patchtest für gekrümmte Elemente [10]

ten. Darüber hinaus zeigt ein Vergleich der Eigenwerte, bei welchen Momentenansätzen die $\xi^{\alpha*}$ -Koordinaten nach SZE und CHOW [67] das Verhalten der gekrümmten Elemente bei regelmäßiger Geometrie beeinflussen. Für die Approximation der Membrananteile werden ausschließlich die natürlichen Koordinaten ξ^α verwendet, da sich $\bar{\xi}^\alpha$ nach YUAN et al. [84] nur bei verzerrter Geometrie von ersteren unterscheiden. Um einen Einfluss des bereits für Scheibenelemente beschriebenen Schub-Lockings auszuschließen, sind die entsprechenden Anteile bei bilinearer Approximation von $n^{\alpha\beta}$ reduziert integriert, s. Kapitel 2.7.1. Die Berechnung der Eigenwerte erfolgt für ein zylindrisches Element mit einem Öffnungswinkel von 90° . Mit der für Zylinderschalen konstanten Metrik ist die Geometrie durch alle Elemente exakt beschrieben.

In Tabelle 2.5 sind die untersuchten Ansatzvarianten, die jeweilige Anzahl an Null-Eigenwerten $n_{\lambda=0}$ sowie der Einfluss der $\xi^{\alpha*}$ -Koordinaten angegeben. Unabhängig von der Approximation der Verschiebungen werden die erforderlichen sechs Starrkörpermoden nur dann abgebildet, wenn die Biegemomente mit der Mindestanzahl an Freiheitsgraden zur Sicherstellung der Elementstabilität beschrieben sind. Das bei einer bilinearen Approximation aller unbekannten Weg- und Kraftgrößen auftretende Membranlocking wird durch $n_{\lambda=0} = 3$ identifiziert.

Auffällig ist, dass auch bei Vermeidung des Versteifungseffektes durch eine selektiv reduzierte Integration oder das Abstimmen der Normalkraftansätze nicht zwangsläufig alle Starrkörpermoden abgebildet werden. Dies ist für die untersuchten Elementvarianten nur bei Verwendung der nach Gleichung 2.39 geforderten Mindestanzahl an Momentenfreiheitsgraden gegeben.

Da die Krümmungsanteile im elastischen Potential ungleich Null sind, heben sich die aus den Monomen ξ^α folgenden Anteile des Flächen- und Randintegrals, abweichend zu Plattenelementen nicht auf. Dementsprechend sind lediglich die Eigenwerte für $5\hat{n}/11\hat{m}$ und $5\hat{n}/12\hat{m}$ identisch. Bei einer bilinearen Approximation aller Kraftgrößen hat die reduzierte Integration zur Vermeidung von Membranlocking den gleichen Effekt wie das Abstimmen der Normalkraftansätze. Dies wird durch entsprechend identische Eigenwerte

Tabelle 2.5: Eigenwertanalyse für ein zylindrisches Schalelement

u_3	$n^{\alpha\beta}$	$m^{\alpha\beta}$	$n_{\lambda=0}$	$\lambda(\xi^\alpha) = \lambda(\xi^{\alpha*})$
lin.	$5\hat{n}$	$9\hat{m}$ -I	6	✓
	$5\hat{n}$	$9\hat{m}$ -II	6	✗
	$5\hat{n}$	$11\hat{m}$	5	✓
	$5\hat{n}$	$12\hat{m}$	5	✓
	$12\hat{n}$ -SRI	$12\hat{m}$	5	✓
	$12\hat{n}$	$12\hat{m}$	3	✓
} λ identisch				
serend.	$13\hat{n}$	$13\hat{m}$ -I	6	✓
	$13\hat{n}$	$13\hat{m}$ -II	6	✓
	$13\hat{n}$	$13\hat{m}$ -III	6	✗
quad.	$13\hat{n}$	$14\hat{m}$ -I	6	✓
	$13\hat{n}$	$14\hat{m}$ -II	6	✗
	$13\hat{n}$	$18\hat{m}$	5	✓

bestätigt. Ein Einfluss der $\xi^{\alpha*}$ -Koordinaten ist äquivalent zu den Plattenelementen nur für die gekoppelten Momentenansätze $9\hat{m}$ -II, $13\hat{m}$ -III und $14\hat{m}$ -II gegeben. Für eine quantitative Angabe der Eigenwerte wird auf Tabelle 2.6 verwiesen. Es ist zu beachten, dass die vorangegangenen Aussagen nur für die hier untersuchte regelmäßige Elementgeometrie Gültigkeit besitzen.

Tabelle 2.6: Eigenwerte eines 90°-Zylinderschalenelementes mit $r = 1$ m, $\ell = 1$ m, $E = 1 \cdot 10^4$ N/m², $t = 0,1$ m und $\nu = 0$

i	5n-9m-I	5n-9m-II	5n-11m/12m 12n-SRI-12m	12n-12m	13n-13m-I	13n-13m-II	13n-13m-III	13n-14mI	13n-14m-II	13n-18m
1	1570.7963	1570.7963	1570.7963	1570.7963	6463.8635	6463.8635	6463.8644	6463.8635	6463.8641	6463.8635
2	1104.5553	1104.5553	1104.5553	1029.3189	3963.4203	3963.4203	3963.6152	3963.4203	3963.0177	3963.4203
3	1029.3189	1029.3189	1029.3189	552.7060	2306.9665	2306.9665	2306.9665	2306.9665	2306.9665	2306.9749
4	523.5988	523.5988	523.5988	523.5988	1991.1721	1991.1721	1991.5008	1991.1721	1991.4167	1991.1721
5	349.3426	349.4421	349.4727	349.4727	1737.1671	1737.1671	1737.1671	1737.1671	1737.1671	1737.1671
6	13.3986	13.4478	13.4629	133.5428	1631.6075	1511.2851	1511.2851	1405.3485	1405.4824	1405.3485
7	11.2202	11.2202	11.2202	54.1333	1405.3485	1405.3485	1405.5910	1327.7945	1327.7945	1327.9121
8	5.7632	5.7632	5.7632	13.4629	1327.7945	1327.7945	1327.7945	1236.1680	1236.1680	1236.1680
9	1.3090	1.3090	1.3090	3.1201	499.9701	499.9701	499.9654	499.9701	499.9558	499.9701
10	0.9331	0.9331	0.9331	1.3090	457.6100	457.6100	457.6100	457.6100	457.6100	457.6498
11	0.5305	0.5305	0.5305	1.1883	303.0961	303.0961	306.7101	330.6043	330.6043	330.6043
12	0.4363	0.3641	0.4363	0.6970	258.2275	252.5083	252.5083	303.0961	303.8041	303.0961
13	0.3641	0.0598	0.3641	0.5305	252.5083	174.8151	174.8151	252.5083	252.5083	252.5083
14	0.1768	0.0210	0.1768	0.4363	109.1375	55.5880	55.5880	103.0645	103.0645	103.0645
15	0.0000	0.0000	0.0238	0.1768	31.5979	17.3975	48.7601	60.9230	60.9230	60.9230
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.1274	17.3975	17.1774	24.4898	19.5370	31.9059	19.5370
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0238	17.1774	14.6515	14.6515	17.3975	19.5370	17.3975
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	10.3359	10.3359	10.3652	17.1774	16.5763	17.1774
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8.6747	8.6747	10.3359	10.3359	10.3359	10.3439
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.4860	3.4860	3.6068	8.6747	9.0199	8.6747
21					1.2639	1.2699	1.2699	3.4860	3.5679	3.4860
22					0.8580	0.8580	0.8580	1.2564	1.2564	1.2564
23					0.4868	0.4863	0.6150	0.8580	0.8580	0.8582
24					0.4363	0.4363	0.5134	0.4809	0.4912	0.4809
25					0.3625	0.3625	0.4863	0.4363	0.4809	0.4363
26					0.1768	0.1768	0.3625	0.3625	0.3664	0.3629
27					0.0000	0.0000	0.0000	0.1768	0.3625	0.1768
28					0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
29					0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30					0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
31					0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
32					0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Membranlocking

Infolge unterschiedlicher Ableitungsordnungen der Feldgrößen kann bei einer Approximation aller Unbekannten mit symmetrischen bilinearen Ansatzfunktionen das Konvergenzkriterium spannungsfreier Starrköperverschiebungen nicht erfüllt werden. Für die kinematische Beziehung der in Dickenrichtung konstanten, den Membrankräften zugeordneten Dehnungen

$$\alpha_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha}|_{\beta} - b_{\alpha\beta}u_3$$

wird die Bedingung $\alpha_{\alpha\beta}^* = 0$ nur im Mittel erfüllt. Infolge der damit auftretenden parasitären Verzerrungen stellt sich für eine tatsächlich spannungsfreie Starrköperverschiebung ein in Krümmungsrichtung oszillierender Normalkraftverlauf ein [22]. Die mit diesem Effekt einhergehende Versteifung der Elemente bei reinen Biegezuständen wird, motiviert durch die unphysikalischen Membrankräfte, als *Membranlocking* bezeichnet. Als kritischer Parameter kann das Verhältnis aus Krümmungsradius zu Elementdicke identifiziert werden [35]. Die bereits zur Vermeidung von Schub-Locking angewandte Technik der selektiv reduzierten Integration ist auch geeignet, um die parasitären Verzerrungen des Membranlockings zu unterdrücken. Durch die Integration des Krümmungsanteils $b_{\alpha\beta}u_3$ mit einem Gaußpunkt werden die linearen Anteile der Ansatzfunktionen nicht berücksichtigt und das Ungleichgewicht der Ableitungsordnungen ausgeglichen. Dabei ist zu beachten, dass die reduzierte Integration nur in Krümmungsrichtung auszuführen ist. Für eine explizite Angabe der modifizierten Terme wird auf [22] verwiesen.

Ein oft verwendetes Beispieltragwerk zur Untersuchung von Membranlocking ist der in Abbildung 2.15 dargestellte Kreisbogen unter reiner Biegebeanspruchung. Die Belastung ist derart normiert, dass die analytische Lösung unabhängig vom Verhältnis r/t ist [6].

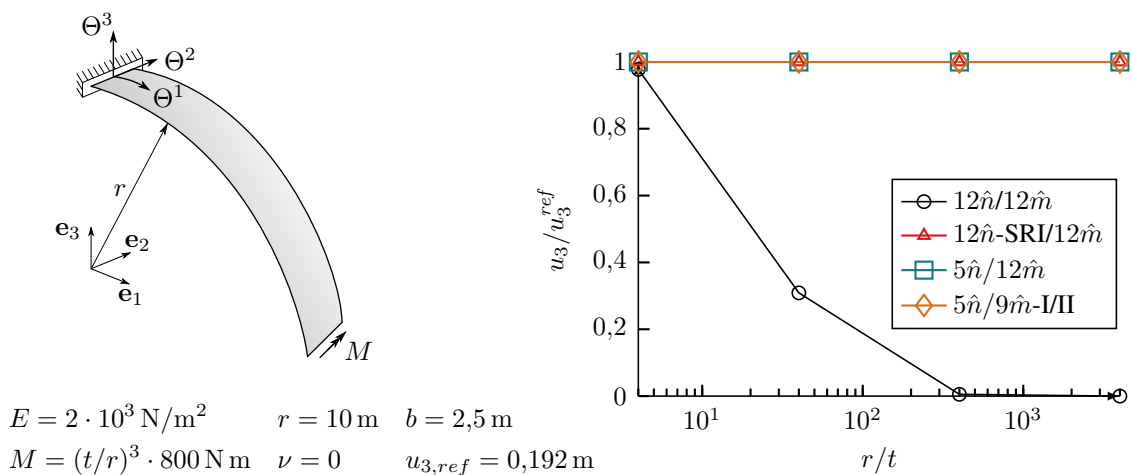


Abbildung 2.15: Eingespannter Kreisbogen unter Biegebeanspruchung

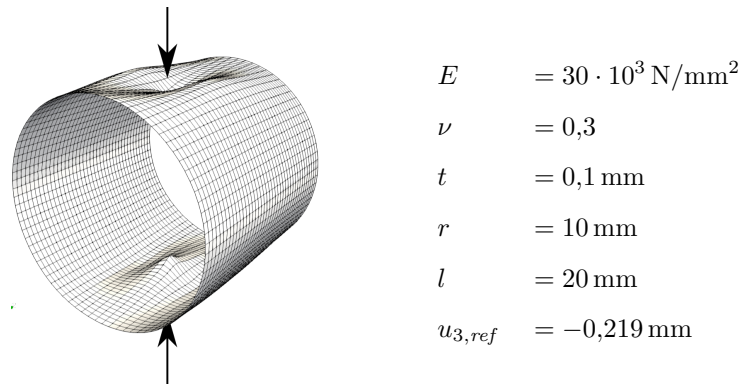


Abbildung 2.16: Verformungsfigur einer Zylinderschale unter radialen Einzellasten

Aus den Radialverschiebungen des freien Endes geht hervor, dass mit Ausnahme von $12\hat{n}/12\hat{m}$ keines der untersuchten 4-Knoten-Elemente von Membranlocking betroffen ist. Gleiches gilt für die nicht dargestellten Elementvarianten mit acht bzw. neun Knoten. Da sich das Torsionsmoment für die gegebene Belastung zu Null ergibt, sind die Ergebnisse unabhängig von den verschiedenen Momentenansätzen und innerhalb eines Elementtyps (4-, 8-, 9-Knoten) identisch. Das Tragwerk ist mit 32 Elementen in Ringrichtung und 8 Elementen in Meridianrichtung diskretisiert. Bei einer größeren Vernetzung sind die Abweichungen zur analytischen Lösung entsprechend größer, für die membranlocking-freien Elemente aber nach wie vor unabhängig von der Schlankheit.

Zylinderschale unter radialen Einzellasten

Das Konvergenzverhalten der vorgestellten Elemente wird anhand eines an den Rändern geschlossenen Zylinders unter radialen Einzellasten untersucht, s. Abbildung 2.16 und [66]. Es sind ausschließlich Ansatzvarianten betrachtet, welche nach Tabelle 2.5 sechs Starrkörpermoden abbilden können. Die Diskretisierung erfolgt unter Berücksichtigung der Symmetrie mit einem regelmäßigen Netz und $n_{Ele} \times n_{Ele}$ Elementen. Die Referenzlösung ist mit 150 Elementen in Ringrichtung und 300 Elementen in Meridianrichtung ermittelt. Aufgrund der rechteckigen Elementgeometrie ist ein Einfluss der $\xi^{\alpha*}$ -Koordinaten nur für die Ansatzvarianten $9\hat{m}$ -II, $13\hat{m}$ -III und $14\hat{m}$ -II gegeben. Da die Abweichungen von den Ergebnissen für natürliche Koordinaten jedoch für alle Ansatzvarianten mit $\approx \pm 1\%$ gering sind, wird auf die Darstellung in Abbildung 2.17 verzichtet. Die Angabe von n_{Fhg} bezieht alle Freiheitsgrade des jeweiligen Elementtyps ein.

Es wird deutlich, dass bei linearer Approximation der Verschiebungen der nicht gekoppelte Momentenansatz (I) der gekoppelten Variante (II) überlegen ist. Für die Elemente mit quadratischem Serendipity-Ansatz für u_3 ergeben sich mit $13\hat{n}/13\hat{m}$ -I/II erkennbar geringere Abweichungen als für $13\hat{n}/13\hat{m}$ -III. Bei einer Beschreibung der Verschiebungen u_3 mit einem quadratischen Lagrange-Ansatz (9 Knoten) in Kombination mit 14 Momentenfreiheitsgraden treten besonders im Bereich grober Diskretisierungen die größten Differenzen zur Referenzlösung auf.

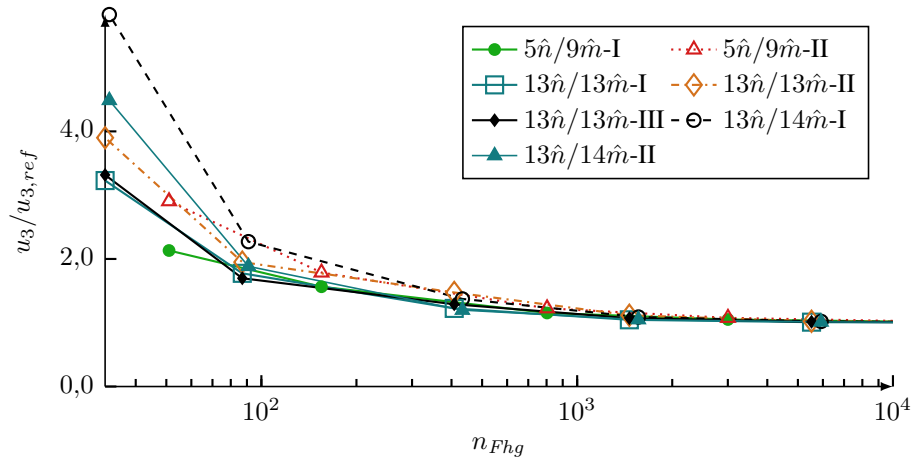


Abbildung 2.17: Konvergenzverhalten der Schalenelemente

Abbildung 2.18 zeigt die Schnittgrößenverläufe entlang der Θ^1 -Achse in Zylindermitte für $n_{Ele} = 10$. Es ist für jeden Elementtyp (4-, 8- und 9-Knoten) die Variante dargestellt, welche zu den geringsten Abweichungen in u_3 im Lastangriffspunkt führt. Neben der Verschiebung werden auch die Kraftgrößen durch diese Elemente gegenüber den nicht gezeigten Ansatzvarianten besser oder gleichwertig approximiert. Es wird deutlich, dass für alle betrachteten Schnittgrößenverläufe die geringsten Abweichungen für Element $5\hat{n}/9\hat{m}$ folgen. Die entlang des betrachteten Schnittes verschwindenden Schubkräfte und Torsionsmomente werden unabhängig von der Ansatzvariante vergleichsweise ungenau abgebildet. Dies ist durch den Einfluss der Diskretisierung in Meridianrichtung begründet, da die Referenzlösungen für n^{12} und m^{12} in dieser Richtung hohe Gradienten aufweisen.

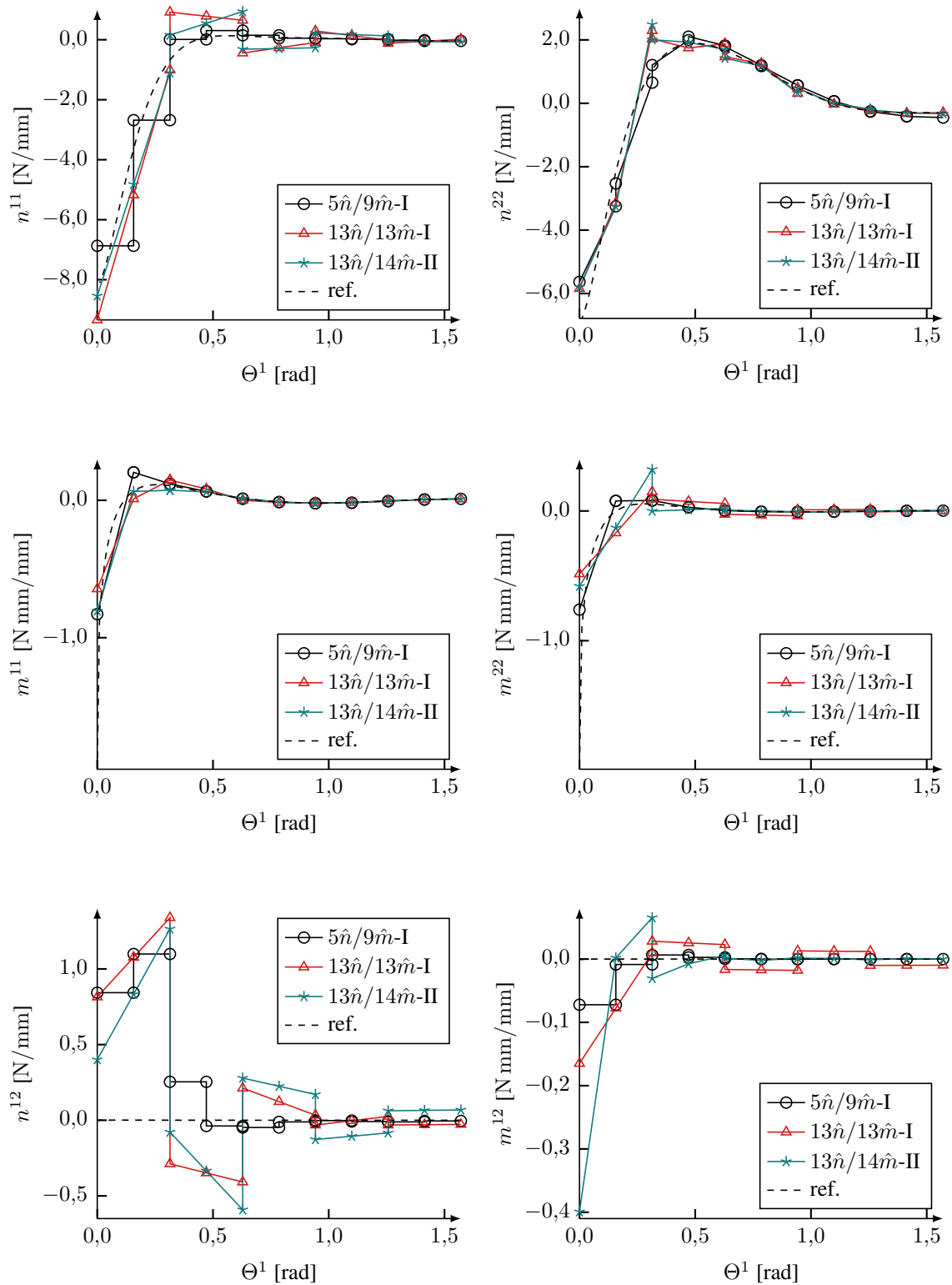


Abbildung 2.18: Schnittgrößenverläufe in Ringrichtung für $n_{Ele} = 10$

3 Störenergiekonzept

Die Bewertung der Imperfektionsempfindlichkeit von ausgesteiften Schalentragsystemen erfolgt auf Grundlage des unter anderen von DINKLER [13] beschriebenen Störenergiekonzeptes. Dieses basiert auf einer Identifikation kritischer Störungen und stellt mit der als Störenergie bezeichneten Formänderungsenergie eine skalare Größe zur Beschreibung der Empfindlichkeit gegenüber Störungen und damit der Stabilität des betrachteten Tragwerks zur Verfügung. Das Konzept wurde von mehreren Autoren in Kombination mit gemischten Elementen auf unterschiedliche Rotationsschalen angewandt und weiterentwickelt, s. [31], [46], [61], [72], [76]. Ziel dieses Kapitels ist eine Übertragung auf die vorgestellte gemischt-hybride Formulierung, um damit die Vorteile hybrider Elemente bei der Modellierung verzweigter Strukturen zu nutzen. Da das grundsätzliche Vorgehen durch die Elementformulierung nicht beeinflusst ist, wird das Störenergiekonzept zunächst für gemischte Elemente erläutert und anschließend zur Anwendung der gemischt-hybriden Formulierung modifiziert.

Kritische Zustände

Kritische Zustände bezeichnen Instabilitätspunkte, in welchen das betrachtete System einen indifferenten Gleichgewichtszustand einnimmt. Die physikalisch motivierte Klassifizierung in Durchschlag- und Verzweigungspunkte ist im Rahmen der folgenden Untersuchungen ausreichend. Bei Überschreiten von ersterem wechselt das System dynamisch unter Verlust der Stabilität in einen benachbarten Gleichgewichtszustand, während im Verzweigungspunkt entweder ein stabiler oder instabiler Gleichgewichtspfad abzweigt, woraus eine veränderte Verformungscharakteristik, aber nicht zwangsläufig ein Stabilitätsversagen resultiert [3]. Ein mögliches Kriterium zur Klassifizierung kritischer Punkte ist durch die Orthogonalitätsbedingung zwischen dem Lastvektor \mathbf{p} und dem Eigenvektor Φ gegeben [83]. Letzterer beschreibt den Zustand im Anfangsnachbeulbereich

$$\mathbf{p}^T \Phi = \begin{cases} = 0 & : \text{Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 & : \text{Durchschlagpunkt} \end{cases} . \quad (3.1)$$

Unabhängig von der Art des kritischen Zustandes ist dieser durch eine verschwindende Steigung im Verlauf des elastischen Potentials $\Pi(\mathbf{z})$ gekennzeichnet. Abbildung 3.1 macht diesen Zusammenhang durch schematische Darstellungen von Energieverläufen für unterschiedliche Lastniveaus deutlich.

Während bedingt stabile Gleichgewichtszustände im Vorbeulbereich mit relativen Minima des elastischen Potentials gekennzeichnet sind, liegt im instabilen Nachbeulbereich ein relatives Maximum vor. Mit zunehmender Last nähern sich die Extremstellen einander an und fallen bei Erreichen des kritischen Zustandes mit dem dazwischen befindlichen Wendepunkt zusammen.

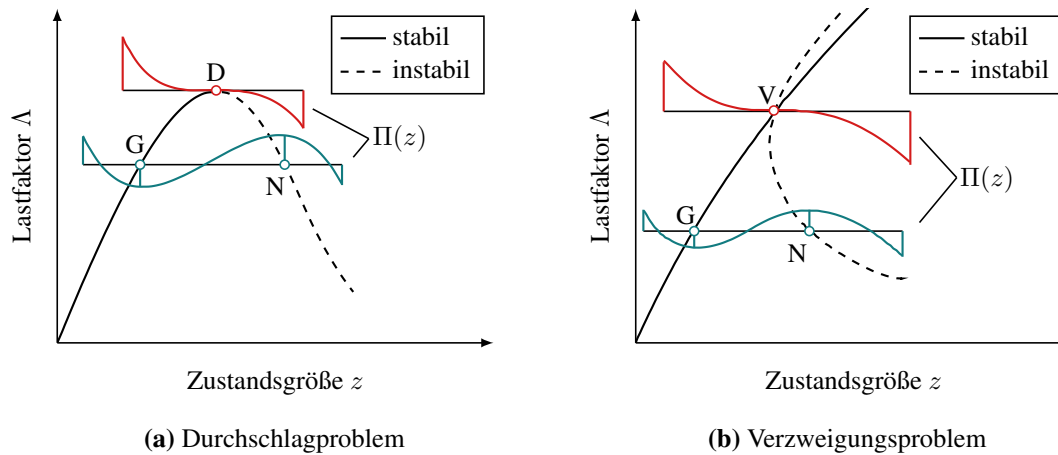


Abbildung 3.1: Energieverteilung vor und bei Erreichen eines kritischen Zustandes [68]

Es sei darauf hingewiesen, dass die Charakteristik der Verläufe sowohl durch das System als auch die betrachtete Zustandsgröße beeinflusst ist und die Darstellung hier in Anlehnung an Last-Verformungskurven von Schalenträgwerken erfolgt. Eine allgemeinere Betrachtung konservativer Systeme ist z. B. in [68] vorgenommen.

Kritische Störung

Abbildung 3.2 zeigt verschiedene Last-Verformungskurven einer axial gestauchten Zylinderschale für variierende Niveaus einer anfänglich wirkenden Störlast p_{st} . Der für die ideale Struktur als Verzweigungspunkt ausgebildete kritische Zustand V wird infolge der Störung des Systems in einen Durchschlagpunkt überführt. Gleichzeitig sinkt mit zunehmender Störung das Niveau der Grundbelastung p_0 , bei welcher der Indifferenzzustand I erreicht wird. Die kritische statische Störung im Sinne des Störenergiekonzeptes bezeichnet die Störung, für welche das ideale System, ausgehend von einem bedingt stabilen Grundzustand G , mit minimalem Energieeintrag in einen Indifferenzzustand I übergeht. Die Störung wirkt dabei nicht anfänglich, sondern wird für einen definierten Grundzustand der idealen Struktur ermittelt. Äquivalent zu kritischen Zuständen im primären Last-Verformungs-Pfad ist der gesuchte Indifferenzzustand I durch einen Wendepunkt im Energieverlauf charakterisiert und kann mit Hilfe eines nichtlinearen Eigenwertproblems auf Grundlage der zweiten Variation des elastischen Potentials identifiziert werden. Für die gemischt-hybride Formulierung befindet sich I mittig zwischen Grundzustand G und Nachbeulzustand N , sodass durch die Zustandsgrößen $\Delta \mathbf{z}_I$ des diskretisierten Systems indirekt ein instabiler Gleichgewichtspfad im Nachbeulbereich beschrieben ist.

Nach Identifikation eines Zustandes I folgt durch Auswertung der Sekantengleichung die zugehörige Störlast. Diese enthält für die gemischte/gemischt-hybride Formulierung neben Kraftgrößen auch Verzerrungen, wobei sich letztere aufgrund der verwendeten Schalentheorie auf Membranverzerrungen beschränken, s. Gleichung 3.9. Befindet sich der Grundzustand unterhalb des absoluten Nachbeulminimums, ist dieser unbedingt stabil

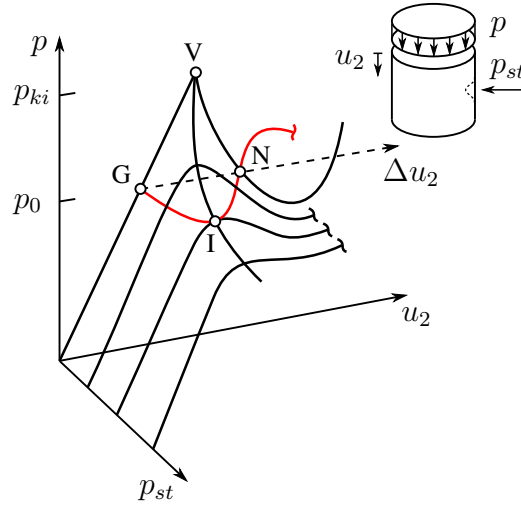


Abbildung 3.2: Last-Verformungsverhalten für die ideale und gestörte Schale [15]

und es kann keine kritische Störung ermittelt werden. Die Störenergie Π_{st} entspricht der Formänderungsarbeit, welche durch die Störlast auf der Änderung der Zustandsgrößen $\Delta \mathbf{z}_I$ geleistet wird und kann mit Hilfe des elastischen Potentials berechnet werden [46].

3.1 Gemischte Formulierung

Ein dem Grundzustand G benachbarter instabiler Gleichgewichtszustand N kann über die Bedingung einer verschwindenden Lastdifferenz $\Delta \mathbf{p} = 0$ und die erste Variation des elastischen Potentials identifiziert werden. Die Sekante vom Grundzustand zum Nachbarzustand folgt mit den zugehörigen Zustandsgrößen \mathbf{z}_0 und $\mathbf{z}_N = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}$ entsprechend Gleichung 2.59 mit

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}) \right] \Delta \mathbf{z} = \Delta \mathbf{p} = 0. \quad (3.2)$$

Die Ermittlung einer nicht trivialen Lösung von Gleichung 3.2 ist bei Vorgabe eines geeigneten Startvektors $\Delta \mathbf{z}$ mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens möglich. Die Lösung ist jedoch stark von der Wahl des Startvektors abhängig und konvergiert nicht zwingend gegen den dichtest benachbarten Zustand. Wird die Problemstellung hingegen als Eigenwertproblem formuliert, ist der nächstgelegene Zustand mit dem kleinsten Eigenwert beschrieben und kann sicher bestimmt werden [31]. Für das Eigenwertproblem und die Zustandsgrößen, welche den Nachbarzustand beschreiben, gilt

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \lambda_N^g \frac{1}{2} \mathbf{A}^{NL}(\Phi) \right] \Phi = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{mit} \quad \Delta \mathbf{z}_N = \lambda_N^g \Phi, \quad \mathbf{z}_N = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}_N.$$

Die Identifikation kritischer Zustände V des primären Last-Verformungs-Pfades erfolgt mit der zweiten Variation des inkrementellen elastischen Potentials aus Gleichung 2.53 [46]

$$\delta^2 \Delta \Pi = \delta \Delta \mathbf{z}^T [\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z})] \delta \Delta \mathbf{z} = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{A}^L + \mathbf{A}^{NL}(\mathbf{z}_0).$$

Wird $\Delta \mathbf{z} = 0$ bzw. $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ gesetzt, lässt sich die Bedingung 3.4 in ein allgemeines Eigenwertproblem in Abhängigkeit des Grundzustandes \mathbf{z}_0 überführen

$$[\mathbf{A}^L + \lambda_V^g \mathbf{A}^{NL}(\mathbf{z}_0)] \Phi = 0 \quad \text{bzw.} \quad [\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \Delta \lambda_V^g \mathbf{A}^{NL}(\mathbf{z}_0)] \Phi = 0. \quad (3.5)$$

Dies entspricht anschaulich einem Verschwinden der Tangentensteifigkeit und ermöglicht es Durchschlag- und Verzweigungspunkte zu bestimmen. Der obere Index $()^g$ kennzeichnet die gemischte Formulierung. Mit dem kleinsten Eigenwert kann die Beullast abgeschätzt werden [76]

$$\mathbf{p}_{ki} \approx {}^1 \lambda_V^g \mathbf{p}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}_{ki} \approx (1 + {}^1 \Delta \lambda_V^g) \mathbf{p}_0. \quad (3.6)$$

Der kritische Zustand bezüglich einer statischen Störung des Systems entspricht einem Indifferenzzustand I im Störlast-Verformungs-Pfad zwischen Grund- und Nachbarzustand. Die Beschreibung des Indifferenzzustandes erfolgt äquivalent zur Identifikation kritischer Zustände im primären Last-Verformungs-Pfad mit einer verschwindenden Tangentensteifigkeit, wenn die nichtlinearen Anteile in Gleichung 3.5 für eine beliebige Störriechung Φ^* ausgewertet werden. Da der Energieverlauf und damit auch der Indifferenzzustand vom Lösungspfad zwischen G und N abhängig ist, muss zwischen der Störriechung Φ^* und dem Eigenvektor Φ unterschieden werden. Letzterer beschreibt den Zustand im Nachbeulbereich. Abgesehen davon unterscheidet sich das nichtlineare Eigenwertproblem durch die gemischte Formulierung und die zugrunde gelegte Schalentheorie mäßiger Rotationen lediglich in dem Faktor $1/2$ von Gleichung 3.3 [61]

$$[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \lambda_I^g \mathbf{A}^{NL}(\Phi^*)] \Phi = 0. \quad (3.7)$$

Um eine Störung zu identifizieren, für welche mit minimalem Energieeintrag ein kritischer Zustand erreicht wird, sind alle mögliche Variationen von Φ^* zu untersuchen. Dies ist bei praxisrelevanten Systemgrößen mit hohem numerischen Aufwand verbunden und kann durch Vorgabe der mit Gleichung 3.5 beschriebenen Eigenformen als Störung vermieden werden [22]. Im Verzweigungspunkt V entspricht die Eigenform exakt der kritischen Störung, da in dieser Richtung kein weiterer Energieeintrag notwendig ist, um den Nachbeulpfad zu erreichen. Mit größer werdendem Abstand zwischen Verzweigungspunkt und Grundzustand verändert sich die Störriechung jedoch zunehmend, sodass eine iterative Variation erforderlich ist [76].

Eine weitere Vereinfachung bietet die Annahme, dass der Indifferenzzustand einen Durchschlagpunkt beschreibt und damit der Übergang in den Nachbeulbereich durch eine affine Vergrößerung der Störung erfolgt. Die somit nicht berücksichtigten Verzweigungspunkte im Störlast-Verformungs-Pfad führen in der Regel auf eine größere Störenergie [76], [31]. Mit $\Phi^* = \Phi$ folgt das nichtlineare Eigenwertproblem zu

$$[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \lambda_I^g \mathbf{A}^{NL}(\Phi)] \Phi = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

$$\text{mit} \quad \Delta \mathbf{z}_I = \lambda_I^g \Phi, \quad \mathbf{z}_I = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}_I.$$

Im Gegensatz zu Gleichung 3.5 ist das Eigenwertproblem, durch die Abhängigkeit der Matrix \mathbf{A}^{NL} von der Lösung, nichtlinear in Φ und nicht für jede beliebige Skalierung eines Eigenvektors erfüllt. Der durch ein Eigenpaar beschriebene Indifferenzzustand ist damit von endlicher Größe. Die den Zustandsgrößen $\Delta \mathbf{z}_I$ zugeordnete Störlast, welche das System aus dem Grundzustand in den kritischen Zustand überführt, folgt aus der Sekantengleichung 3.2 unter Berücksichtigung von Gleichung 3.8 zu

$$\Delta \mathbf{p}_{st} = [\Delta \mathbf{f}_{st} \ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{st}]^T = \left[\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_I) \right] \Delta \mathbf{z}_I = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_I) \Delta \mathbf{z}_I. \quad (3.9)$$

Diese enthält für die gemischte Formulierung neben Kraftgrößen auch Verzerrungen und ist für viele Anwendungsfälle orthogonal zur Grundbelastung [46], [72]. Durch die alleinige Abhängigkeit von den geometrisch nichtlinearen Anteilen der Steifigkeitsmatrix wird deutlich, dass die Störlast für die hier verwendete 1. Approximation der Schalentheorie, bei welcher die geometrische Nichtlinearität durch entsprechende Anteile in den Verzerrungen $\alpha_{\alpha\beta}$ berücksichtigt sind, keine Krümmungen beinhaltet.

Ein wesentlicher Aspekt für die Bewertung der Stabilität realer Strukturen ist, dass der ermittelte Indifferenzzustand mit einem Minimum an eingebrachter Störenergie Π_{st} assoziiert ist. Diese Bedingung erfordert im Allgemeinen eine Berechnung aller Eigenpaare und der zugehörigen Störenergien. Um den damit verbundenen hohen Rechenaufwand zu vermeiden, wird durch eine geeignete Normierung des Eigenvektors während der iterativen Lösung des Eigenwertproblems ein proportionaler Zusammenhang zwischen Störenergie und Eigenwert hergestellt

$$\Pi_{st} \propto \lambda_I \quad \rightarrow \quad \min \Pi_{st} \propto {}^1\lambda_I. \quad (3.10)$$

So ist sichergestellt, dass die minimale Störenergie aus dem durch den kleinsten Eigenwert ${}^1\lambda_I$ beschriebenen Indifferenzzustand resultiert, s. Kapitel 3.5.

3.2 Gemischt-hybride Formulierung

Die Gleichungen zur Identifikation kritischer Zustände bei einer gemischt-hybriden Formulierung folgen direkt aus den Eigenwertproblemen der gemischten Formulierung. Nach statischer Kondensation der Spannungsfreiwerte in Gleichung 3.5 bzw. Gleichung 3.8 können Verzweigungs- und Durchschlagpunkte des primären Last-Verformungs-Pfades bzw. Durchschlagpunkte des Störlast-Verformungs-Pfades ermittelt werden. Das genaue Vorgehen wird nachfolgend für den allgemeineren Fall des nichtlinearen Eigenwertproblems aus Gleichung 3.8 gezeigt. Eine getrennte Darstellung von Weg- und Kraftgrößenanteile führt auf

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{us}^L \\ \mathbf{K}_{su}^L & \mathbf{K}_{ss}^L \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{us} \\ \mathbf{K}_{su} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{NL}(\mathbf{s}_0) & \mathbf{K}_{us}^{NL}(\mathbf{u}_0) \\ \mathbf{K}_{su}^{NL}(\mathbf{u}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda_I^h \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{NL}(\Phi_s) & \mathbf{K}_{su}^{NL}(\Phi_u) \\ \mathbf{K}_{su}^{NL}(\Phi_u) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Die Abgrenzung der gemischt-hybriden zur gemischten Formulierung ist durch den oberen Index $(\)^h$ gekennzeichnet. Über die zweite Zeile des Gleichungssystems

$$\Phi_s = -(\mathbf{K}_{ss}^L)^{-1} (\mathbf{K}_{su} + \lambda_I^h \mathbf{K}_{su}^{NL}) \Phi_u \quad (3.12)$$

erfolgt das Kondensieren der Kraftgrößenanteile. Es resultiert das in λ_I^h quadratische Eigenwertproblem

$$\{\mathbf{K}_0 + \lambda_I^h \cdot \mathbf{K}_1 + (\lambda_I^h)^2 \cdot \mathbf{K}_2\} \Phi_u = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

mit

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{s}_0) = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{us} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su},$$

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_0, \Phi_u, \Phi_s) = \mathbf{K}_{uu}^{NL} + \mathbf{K}_{us} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su}^{NL} + \mathbf{K}_{us}^{NL} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su},$$

$$\mathbf{K}_2(\Phi_u \cdot \Phi_u) = \mathbf{K}_{us}^{NL} (-\mathbf{K}_{ss})^{-1} \mathbf{K}_{su}^{NL}.$$

Aufgrund der formalen Ähnlichkeit des Eigenwertproblems zur linearisierten Steifigkeitsmatrix des Newton-Raphson-Verfahrens unterscheiden sich die Teilmatrizen \mathbf{K}_i aus Gleichung 2.64 lediglich durch die Abhängigkeit in Φ von Gleichung 2.64.

Während für die Identifikation kritischer Zustände im Rahmen der gemischten Formulierung die Lösung eines allgemeinen in λ_I linearen Eigenwertproblems erforderlich ist, erhöht sich die Ordnung mit der Umwandlung in ein quadratisches Eigenwertproblem.

Die Nichtlinearität im Sinne einer Abhängigkeit der Matrizen vom Lösungsvektor Φ ist davon unbeeinflusst. Sind die Weggrößenanteile Φ_u nach Lösen des Eigenwertproblems bestimmt, folgen die zugehörigen Kraftgrößenanteile in einer Nachlaufrechnung aus Gleichung 3.12 sowie die inkrementelle Störlast über Gleichung 3.9 mit dem Indifferenzzustand

$$\Delta \mathbf{z}_I = [\Delta \mathbf{u}_I \ \Delta \mathbf{s}_I]^T = \lambda_I^h \cdot [\Phi_u \ \Phi_s]^T. \quad (3.14)$$

Neben einer nicht anfänglichen Störung des Belastungszustandes ist durch die enthaltene zweite Variation der Kraftgrößen im Funktional der gemischt-hybriden Formulierung auch eine Störung des Verzerrungszustandes berücksichtigt [46]. Soll der Pfad vom Grund- zum Indifferenzzustand durch Aufbringen einer vorab ermittelten Störlast berechnet werden, sind die Verzerrungsanteile bei der Kondensation der Kraftgrößen äquivalent zu den entsprechenden Anteilen des Residuums zu berücksichtigen, s. Kapitel 2.6.

3.3 Weggrößenformulierung

KNOKE [31] und PONTOW [46] zeigen, dass eine unabhängige Variation der Kraftgrößen im elastischen Potential für die Identifikation kritischer Zustände gemäß Störenergiekonzept essenziell ist. Die Übertragbarkeit auf eine klassische Weggrößenformulierung ist damit nicht gegeben. Während die Berücksichtigung einer definierten Störung des Verzerrungszustandes durch die Vorgabe einer entsprechender Belastung möglich ist, misslingt die Identifikation der für den Grundzustand ungünstigsten Störverzerrung [46]. Die Lösung des entsprechenden Eigenwertproblems in Weggrößenformulierung bildet lediglich Zustände des primären Last-Verformungs-Pfades ab und die ermittelten Verschiebungen $\mathbf{u} = \lambda \Phi_u$ entsprechen nicht dem Indifferenzzustand \mathbf{u}_I der gemischten/gemischt-hybriden Formulierung. Bei diesen sind die Kraftgrößen durch eine freie Variation Bestandteil der Tangentensteifigkeit und explizit im Kriterium einer verschwindenden zweiten Variation des elastischen Potentials enthalten, wodurch die Identifikation einer ungünstigsten Störung ermöglicht wird. Dies wird anhand der Nachlaufrechnung anschaulich deutlich. Ausgehend von einem Weggrößenfeld \mathbf{u}_I eines gültigen Indifferenzzustandes erfolgt die Bestimmung der zugehörigen Kraftgrößen im Rahmen einer Weggrößenformulierung mit den Grundgleichungen der Kinematik der Schalentheorie. Diese sind bei der gemischten/gemischt-hybriden Formulierung in der *ersten* Variation des elastischen Potentials nach den Kraftgrößen enthalten. Um eine Störung der Verzerrungen abzubilden, ist es jedoch erforderlich, die Kraftgrößen auf Grundlage der *zweiten* Variation des Funktionals zu bestimmen, s. Gleichung 3.12. So führt die Nachlaufrechnung der Weggrößenformulierung auch für ein gültiges \mathbf{u}_I nicht auf die zugehörigen Kraftgrößenanteile, welche den gesuchten Indifferenzzustand außerhalb des primären Last-Verformungs-Pfades eindeutig beschreiben [46].

3.4 Grund- und Störenergie

Unter der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens bezeichnet die Grundenergie die Formänderungsenergie, welche für einen definierten Grundzustand \mathbf{z}_0 im Tragwerk enthalten ist. Aus dem inkrementellen Energiezuwachs $\Delta\Pi$ in Gleichung 2.53 folgt unter Berücksichtigung der Arbeitsanteile der Grundbelastung für die gemischte Formulierung die Summe über n Inkremente zu

$$\Pi_{gr}^g = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{z}_i^T \mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_0) \Delta \mathbf{z}_i + \frac{1}{6} \Delta \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_i) \Delta \mathbf{z}_i \quad (3.15)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{A} \left(\frac{1}{2} \mathbf{z}_0 \right) \mathbf{z}_0.$$

Die einem kritischen Zustand I zugeordnete Störenergie ist als die mit der Störlast eingebrachte Formänderungsenergie definiert. Arbeitsanteile, welche durch die Grundbelastung auf den Zustandsgrößen $\Delta \mathbf{z}_I$ geleistet werden, sind explizit ausgenommen, da diese nicht durch die Störlast verursacht werden [76]. Es folgt für die Störenergie

$$\begin{aligned} \Pi_{st}^g &= \Delta \mathbf{z}_I^T \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{A}^L + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{NL}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{6} \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_I) \right\} \Delta \mathbf{z}_I \\ &= \Delta \mathbf{z}_I^T \left\{ -\frac{1}{3} \mathbf{A}^{NL}(\Delta \mathbf{z}_I) \right\} \Delta \mathbf{z}_I. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Während sich der erste Term aus Membran- und Biegeenergie zusammensetzt, beinhalten der zweite und dritte Term für die vorgestellte Schalentheorie ausschließlich Membranenergie. PONTOW [46] zeigt am Beispiel einer Kugelschale unter Radialdruck, dass das Verhältnis von Membran- zu Biegeenergie zwar vom Lastniveau abhängig ist, der überwiegende Anteil der Störenergie jedoch unabhängig vom Niveau der Grundbelastung aus Biegeenergie besteht. Wird das für den kritischen Zustand definitionsgemäß erfüllte Eigenwertproblem 3.8 eingesetzt, folgt eine ausschließlich von den nichtlinearen Anteilen der Steifigkeitsmatrix abhängige Beschreibung.

Gemischt-hybride Formulierung

Die direkte Verwendung von Gleichung 3.15 im Rahmen gemischt-hybrider Elemente ist möglich, wenn die Berechnung der Grundenergie auf Elementebene mit anschließender Summation der Elementenergien erfolgt. Für die Einhaltung der Elementübergangsbedingungen sind dabei die aus den Verdrehungen w_ν folgenden Anteile in der Steifigkeitsmatrix zu berücksichtigen. Alternativ kann durch Einsetzen von den aus der Sekanten- bzw. Tangentengleichung abgelösten Spannungen s_0 bzw. Δs_i eine Berechnung auf Systemebene erfolgen.

Äquivalent dazu folgt die Störenergie der gemischt-hybriden Formulierung Π_{st}^h durch Einsetzen der mit den Gleichungen 3.12 und 3.14 beschriebenen Spannungen

$$\Delta \mathbf{s}_I = \lambda_I^h \Phi_s = - (\mathbf{K}_{ss}^L)^{-1} [\mathbf{K}_{su}^L + \mathbf{K}_{su}^{NL}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{K}_{su}^{NL}(\Delta \mathbf{u}_I)] \Delta \mathbf{u}_I \quad (3.17)$$

in die gemischte Form Π_{st}^g . Unter Verwendung der in Gleichung 2.64 eingeführten Teilmatrizen gilt für die Störenergie in Abhängigkeit des Indifferenzzustandes

$$\Pi_{st}^h = \Delta \mathbf{u}_I^T \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{K}_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{s}_0) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\mathbf{u}_0, \Delta \mathbf{u}_I, \Delta \mathbf{s}_I) - \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}_I \cdot \Delta \mathbf{u}_I) \right\} \Delta \mathbf{u}_I. \quad (3.18)$$

Mit Gleichung 3.18 kann die Störenergie nach vorherigem Aufbau der Teilmatrizen \mathbf{K}_i mit den Weggrößen des Indifferenzzustandes auf Systemebene ermittelt werden. Bei einer Berechnung auf Elementebene mit Hilfe der gemischten Form nach Gleichung 3.16 sind wiederum die aus den Randintegralen resultierenden Steifigkeiten zu berücksichtigen, damit die Übergangsbedingungen erfüllt sind.

3.5 Lösung der Eigenwertprobleme

Für die Lösung von Eigenwertproblemen steht in der Literatur eine Vielzahl von iterativen Algorithmen zur Verfügung. Die Matrizen der hier betrachteten allgemeinen Eigenwertprobleme sind für beide Formulierungen vom Eigenvektor abhängig und können entweder in jedem Iterationsschritt des Lösungsalgorithmus oder erst nach einer vollständigen Lösung des Eigenwertproblems aktualisiert werden. Das aus der gemischt-hybriden Formulierung resultierende quadratische Eigenwertproblem (Gleichung 3.13) kann als solches oder durch Rückführung auf ein lineares Eigenwertproblem gelöst werden. Letzteres hat eine Aufweitung der Matrizen von $n \times n$ auf $2n \times 2n$ zur Folge.

Ist nur der kleinste Eigenwert eines allgemeinen linearen Eigenwertproblems gesucht, stellt die inverse Vektoriteration, welche auch als inverse Potenzmethode oder inverse von-Mises-Iteration bezeichnet wird, eine geeignete Methode dar. Um eine Konvergenz gegen den kleinsten Eigenwert mit möglichst wenig Iterationsschritten zu gewährleisten sowie zur Vermeidung von Rundungsfehlern infolge der Rechengenauigkeit, ist eine Normierung des Eigenvektors in jedem Iterationsschritt auszuführen [29], [57]. Diese folgt für das Eigenwertproblem in verallgemeinerter Schreibweise

$$\mathbf{C}\Phi = \lambda \mathbf{D}\Phi \quad (3.19)$$

im k-ten Iterationsschritt mit

$${}_k\Phi^T \cdot \mathbf{D} \cdot {}_k\Phi = \pm 1,0 \quad (3.20)$$

und ist für das Störenergiekonzept von besonderer Bedeutung, welche nachfolgend erläutert wird. Für eine explizite Angabe der vollständigen Iterationsvorschrift sei auf die mathematische Grundlagenliteratur verwiesen, z. B. [57].

Gemischte Formulierung

Bei einer Anwendung des Störenergiekonzeptes im Rahmen der gemischten Formulierung besteht ein wesentlicher Vorteil darin, dass aus der Normierungsvorschrift in Gleichung 3.20 und $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{NL}$ ein direkter Zusammenhang zwischen Störenergie und Eigenwert folgt

$$\Pi_{st}^g = \frac{1}{3} (\lambda_I^g)^3 \rightarrow \min \Pi_{st}^g = \frac{1}{3} (\lambda_I^g)^3. \quad (3.21)$$

Da somit keine gesonderte Normierung zur Sicherstellung der Proportionalität nach Gleichung 3.10 erforderlich ist, kann die von ${}_k\Phi$ abhängige Matrix in jedem Schritt der inversen Vektoriteration aktualisiert werden. Eine Verbesserung des Konvergenzverhaltens wird durch Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens auf die als Gleichungssystem mit Nebenbedingung formulierte Iterationsvorschrift erzielt [72].

Gemischt-hybride Formulierung

Das aus der gemischt-hybriden Formulierung resultierende quadratische Eigenwertproblem aus Gleichung 3.13 wird in ein allgemeines Eigenwertproblem überführt, s. [1]

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda_I^h \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \lambda_I^h \Phi_u \\ \Phi_u \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{K}}_1 & \\ & + \lambda_I^h \cdot \\ & \tilde{\mathbf{K}}_2 \end{array} \right\} \tilde{\Phi} = \mathbf{0}.$$

Die weitere Rückführung in ein spezielles Eigenwertproblem durch Multiplikation mit $\tilde{\mathbf{K}}_2^{-1}$ ist nicht möglich, da $\tilde{\mathbf{K}}_2$ im allgemeinen nicht regulär ist. Eine Lösung mit Hilfe der inversen Vektoriteration gelingt, wenn der Eigenvektor $\tilde{\Phi}$ in jedem Iterationsschritt gemäß Gleichung 3.20 normiert wird, wobei $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{K}}_2$ gilt. Im Gegensatz zur gemischten Formulierung führt die Normierungsvorschrift für das linearisierte Eigenwertproblem jedoch nicht auf einen proportionalen Zusammenhang zwischen Eigenwert und Störenergie. Die Identifikation des Indifferenzzustandes mit minimaler Störenergie erfordert damit die Berechnung aller reellen Eigenpaare, was bei großen Systemen mit entsprechend hohem numerischem Aufwand verbunden ist. Um diesen zu reduzieren, ist es daher essentiell, durch eine geeignete Normierung einen zu Gleichung 3.21 äquivalenten Zusammenhang für die gemischt-hybride Formulierung zu definieren. Die Aktualisierung der Eigenwertgleichung kann jedoch durch eine von Gleichung 3.20 abweichende physikalisch motivierte Normierungsvorschrift nicht mehr in jedem Iterationsschritt der inversen Vekt-

iteration erfolgen, sondern erst nach vollständigem Lösen des Eigenwertproblems mit konstant gehaltenen Matrizen. Bei der damit notwendigen verschachtelten Iteration wird nachfolgend zwischen lokaler (inverser Vektoriteration) und globaler Iterationsschleife unterschieden. Aus Gleichung 3.18 folgt die Störenergie des i -ten globalen Iterationsschrittes in Abhängigkeit des Eigenpaares ${}_i(\lambda_I^h, \Phi)$ zu

$${}_i\Pi_{st}^h = {}_i\lambda^h {}_i\Phi_u^T \underbrace{\left\{ \frac{1}{2}\mathbf{K}_0 + {}_i\lambda^h \cdot \frac{1}{6}{}_i\mathbf{K}_1 - ({}_i\lambda^h)^2 \cdot \frac{1}{6}{}_i\mathbf{K}_2 \right\}}_{{}_i\mathbf{P}} {}_i\lambda^h {}_i\Phi_u. \quad (3.23)$$

Wird die Normierung des Eigenvektors nach

$$(a) : {}_i\Phi_u^T {}_i\mathbf{P} {}_i\Phi_u = \pm 1,0 \quad \text{bzw.} \quad (b) : {}_i\Phi_u^T ({}_i\lambda^h {}_i\mathbf{P}) {}_i\Phi_u = \pm 1,0 \quad (3.24)$$

durchgeführt, sind der gesuchte Indifferenzzustand und die minimale Störenergie mit dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert ${}^1\lambda_I^h$ beschrieben

$$(a) : \min \Pi_{st}^h = ({}^1\lambda_I^h)^2 \quad \text{bzw.} \quad (b) : \min \Pi_{st}^h = \pm {}^1\lambda_I^h. \quad (3.25)$$

Alternativ besteht auch die Möglichkeit, die bei der gemischten Formulierung bevorzugte Normierung zu verwenden. Der Normierungskoeffizient folgt dann aus der Matrix $\mathbf{A}^{NL}(\Phi)$ des gemischten Eigenwertproblems in Gleichung 3.8 und der Normierungsvorschrift der inversen Vektoriteration (Gleichung 3.20) über

$$(c) : {}_i\Phi_u^T {}_i\mathbf{A}^{NL} {}_i\Phi_u = \pm 1,0. \quad (3.26)$$

Der Zusammenhang zwischen Eigenwert und Störenergie ist für diesen Fall äquivalent zur gemischten Formulierung gegeben

$$(c) : \min \Pi_{st}^h = \frac{1}{3} ({}^1\lambda_I^h)^3. \quad (3.27)$$

Da die gemischten Systemmatrizen bei gemischt-hybriden Elementen nicht direkt zur Verfügung stehen, muss Gleichung 3.26 auf Elementebene ausgewertet und der Normierungskoeffizient durch Summation über alle Elemente ermittelt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass dieses Vorgehen *nicht* der durch die inverse Vektoriteration geforderten Normierung bezüglich des linearisierten Eigenwertproblems aus Gleichung 3.22 entspricht. Bei Verwendung von Variante (a) oder (b) resultiert auch aus einem negativen Eigenwert eine positive Störenergie, da die Auswertung der zugehörigen Normierungsvorschrift für diese Fälle einen negativen Faktor zur Folge hat.

Die mit den Gleichungen 3.24 und 3.26 beschriebenen Normierungen sind geeignet, um kritische Zustände über den kleinsten Eigenwert zu ermitteln, führen aber zu Unterschieden im Konvergenzverhalten der globalen Iteration. Eine Verifikation der gemischt-hybriden Formulierung und eine Betrachtung des Konvergenzverhaltens erfolgt in Ka-

pitel 3.6. Abbildung 3.3 zeigt ein Ablaufdiagramm der Programmroutine. Die inverse Vektoriteration kann durch ein beliebiges Lösungsverfahren für lineare Eigenwertprobleme ersetzt werden, da die Aktualisierung des Eigenwertproblems erst nach vollständigem Lösen mit konstant gehaltenen Matrizen möglich ist. In der vorliegenden Arbeit ist die im Programmpaket MATLAB implementierten ARPACK-Bibliothek [38] verwendet, welche auf das effiziente Lösen von Eigenwertproblemen mit großen dünnbesetzten Matrizen spezialisiert ist.

Nach vollständigem Lösen des linearisierten Eigenwertproblems im i -ten globalen Iterationsschritt ist dieses im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit für $\pm_i \Phi$ erfüllt. Welches Vorzeichen der Eigenvektor erhält, ist vom Lösungsalgorithmus abhängig. Da die Richtung der Störung durch das Vorzeichen des Eigenpaares bestimmt wird und nicht beliebig gewählt werden kann, muss das Vorzeichen von $_i \Phi$ durch Testen des Eigenwertproblems nach Aktualisierung der Matrizen ermittelt werden. So ist sichergestellt, dass das Eigenpaar den kritischen Zustand zutreffend beschreibt und das Vorzeichen des Startvektors im folgenden Iterationsschritt zu dem des Eigenwertes passt. Die unter Anwendung der ARPACK-Bibliothek [38] durchgeführten Untersuchungen zeigen jedoch, dass in vielen Fällen bei nicht passendem Vorzeichen des Eigenvektors das Vorzeichen des Eigenwertes im folgenden Iterationsschritt wechselt und der kritische Zustand mit $\Delta \mathbf{z}_I = {}^1 \lambda_I \Phi = (-{}^1 \lambda_I) (-\Phi)$ äquivalent beschrieben wird. Lediglich nach dem letzten Iterationsschritt ist für die abschließende Berechnung des Indifferenzzustandes und der Störenergie das Vorzeichen des Eigenvektors zu ermitteln.

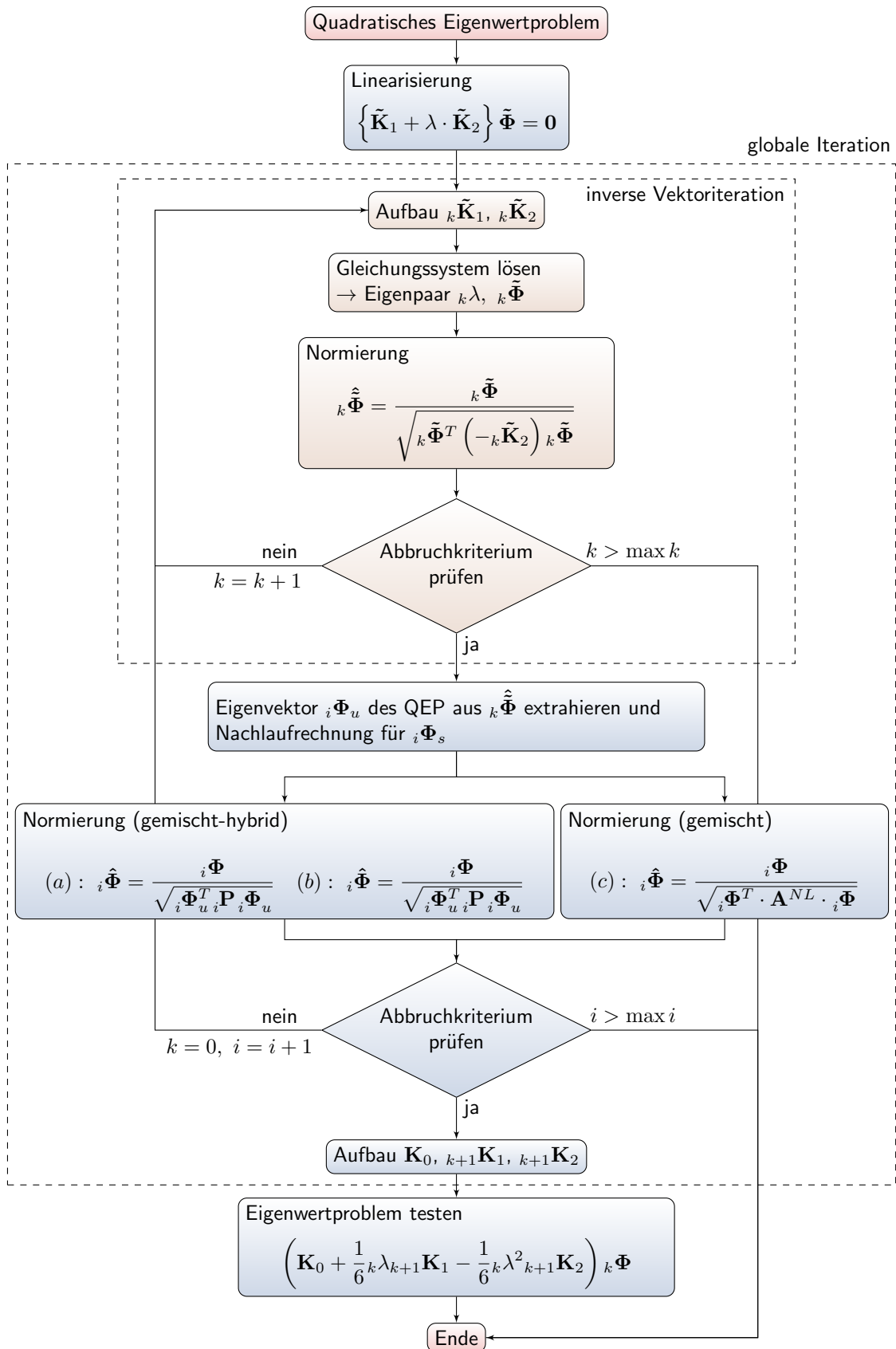


Abbildung 3.3: Eigenwertiteration für das quadratische Eigenwertproblem nach Gleichung 3.13

3.6 Verifikation der gemischt-hybriden Formulierung

Die Verifikation des Störenergiekonzeptes in gemischt-hybrider Formulierung sowie der vorgestellten Normierungsvarianten erfolgt am Beispiel des in Abbildung 3.4 dargestellten Bogentragwerkes. Referenzlösungen sind u. a. von WALKER [79] und HILLMANN [22] angegeben. Die Diskretisierung erfolgt mit 20 Elementen in Richtung der krummlinigen Koordinate und einem Element in Meridianrichtung.

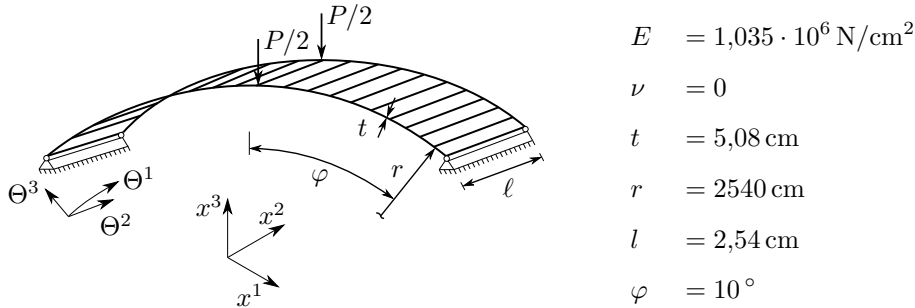


Abbildung 3.4: Kreisbogen unter Einzellasten [22], [79]

Abbildung 3.5 zeigt den primären Last-Verformungs-Pfad für die Verschiebung u_3 in Bogenmitte sowie einen abzweigenden instabilen Gleichgewichtspfad. Der Verzweigungspunkt ist durch den kleinsten Eigenwert und die Beulform mit dem zugehörigen Eigenvektor beschrieben. Die Zustandsgrößen für den mit der gemischten Formulierung ermittelten Indifferenzzustand befinden sich erwartungsgemäß mittig zwischen den Zustandsgrößen des Grund- und Nachbarzustandes.

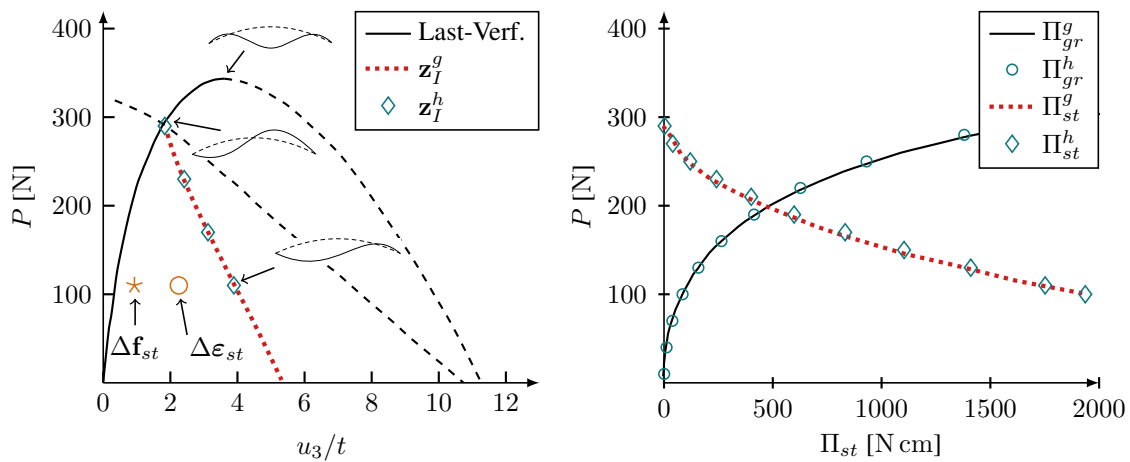


Abbildung 3.5: Last-Verformungs-Pfad und Verlauf der Störenergie

Die bei $P = 110 \text{ N}$ eingetragenen Punkte markieren Verformungszustände, für welche die zuvor ermittelte Störlast ausgehend vom Grundzustand teilweise auf das System aufgebracht ist. Dabei ist jeweils nur der Kraftanteil Δf_{st} (*) bzw. der Verzerrungsanteil $\Delta \epsilon_{st}$ (o) der Störlast berücksichtigt. Wie bereits in Kapitel 3.3 erläutert, sind beide Anteile für die Beschreibung einer kritischen Störung essentiell. Die damit erforderliche

freie Variation der Kraftgrößen ist bei einer reinen Weggrößenformulierung nicht gegeben, weshalb die Identifikation kritischer Zustände misslingt. Ebenfalls dargestellt ist der Verlauf der Grund- und Störenergie in Abhängigkeit der Belastung. Bei Erreichen des Verzweigungspunktes muss mit $\Pi_{st} = 0$ keine Energie in das System eingebracht werden, um einen Indifferenzzustand zu erreichen. Mit sinkendem Lastniveau des Grundzustandes nimmt die benötigte Störenergie entsprechend zu.

Es wird deutlich, dass das Störenergiekonzept in der vorgestellten gemischt-hybriden Formulierung in der Lage ist, kritische Zustände und die zugehörigen Störenergien zu identifizieren. Die Normierung des Eigenvektors ist nach Variante (a) aus Gleichung 3.24 ausgeführt.

Einfluss der Eigenvektornormierung

Abbildung 3.6 zeigt die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte und die zugehörigen Störenergien für die vorgestellten Normierungsvarianten. Die unterschiedlichen Eigenwerte führen über die in den Gleichungen 3.25 und 3.27 beschriebenen Zusammenhänge auf identische Störenergien. Ein Einfluss der Normierung ist lediglich im Verlauf der Iteration zu beobachten, da die Matrizen des Eigenwertproblems in jedem globalen Schritt mit den Eigenvektoren neu aufgebaut werden.

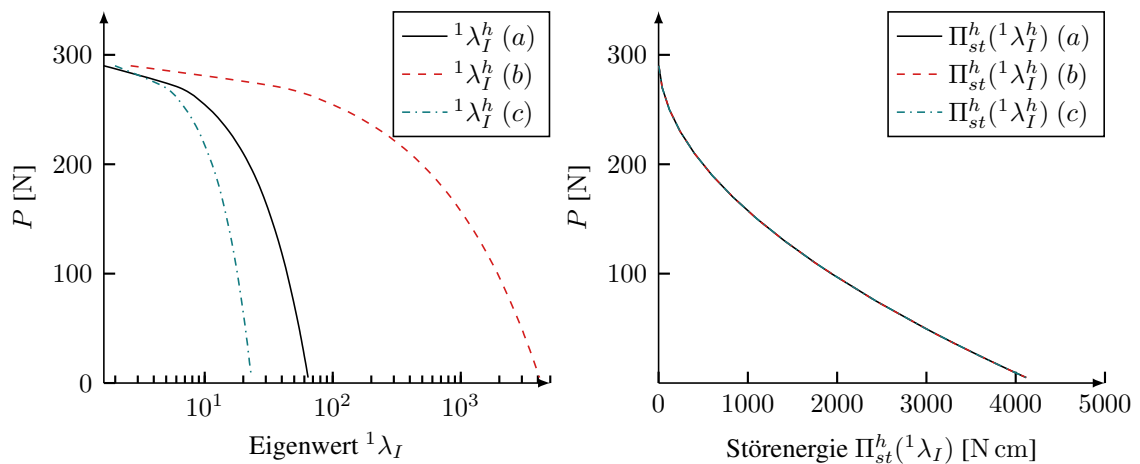


Abbildung 3.6: Eigenwerte und resultierende Störenergie in Abhängigkeit der Normierungsvorschrift

In Abbildung 3.7 ist die Änderung der Eigenwerte und Eigenvektornormen gezeigt. Während für die Normierung (a) der Eigenwert schneller konvergiert als der zugehörige Eigenvektor, gilt für die Varianten (b) und (c) die umgekehrte Beziehung, wenngleich für (a) die Iteration auf geringerem Niveau verläuft. Die Unterschiede wirken sich dahingehend aus, dass im Fall von Variante (a) der Eigenwert nach wenigen Iterationsschritten die Störenergie mit $\Pi_{st}^h = (1\lambda_I^h)^2$ vergleichsweise genau beschreibt, während aus einer Berechnung mit dem vollständigen Indifferenzzustand nach Gleichung 3.18 durch den nicht ausreichend konvergierten Eigenvektor noch deutliche Abweichungen vorhanden sind.

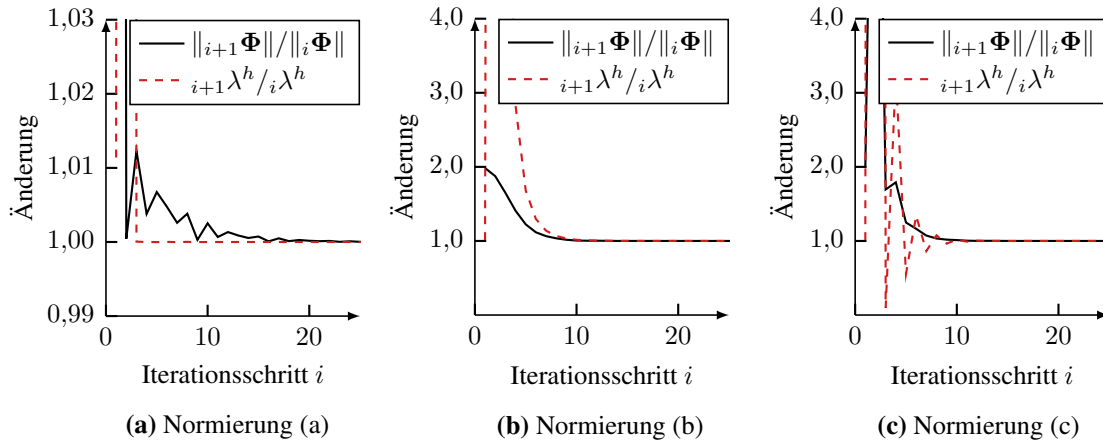


Abbildung 3.7: Konvergenz der Abbruchkriterien bei $P = 5 N$

Der Iterationsverlauf ist durch die Belegung der Matrizen beeinflusst und damit vom Lastniveau, der Diskretisierung und dem untersuchten Tragwerk abhängig. Die Änderung des Eigenwertes bzw. der Eigenvektornorm ist als Abbruchkriterium nur bedingt geeignet, da die Iteration unter Umständen beendet wird, bevor das gesamte Eigenpaar ausreichend konvergiert ist. Eine bessere Bewertung des Fehlers ist durch erneutes Aufbauen und Testen des Eigenwertproblems möglich, da sowohl Eigenwert als auch Eigenvektor berücksichtigt werden. Erfolgt dies in jedem globalen Iterationsschritt, ist damit ein entsprechend hoher Rechenaufwand verbunden. Eine Reduktion der numerischen Kosten ist möglich, wenn als Abbruchkriterium die Änderung des Eigenvektors oder des Eigenwertes gewählt und erst nach Abbruch der Iteration das Eigenwertproblem getestet wird. Ist dann eine vorgegebene Genauigkeit unterschritten, kann die Iteration fortgesetzt werden.

4 Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Zylinderschalen

Bei ausgesteiften Zylinderschalen sind Beul- und Störformen mit globalem bzw. lokalem Charakter zu unterscheiden. Letztere sind durch alleiniges Beulen der Steifen oder der Mantelfläche gekennzeichnet, wobei die jeweils nicht maßgebenden Tragwerksteile nur unwesentliche Verformungen aufweisen. Im Fall von globalem Stabilitätsversagen treten hingegen Verformungszustände auf, bei welchen sich Beulwellen über mehrere Schalenelemente erstrecken und die radialen Verschiebungsamplituden von Steifen und Mantelfläche von annähernd gleicher Größe sind. Eine ausführliche Zusammenstellung experimenteller Untersuchungen für längs- und ringversteifte Zylinder ist in [59] gegeben.

Das Nachbeulverhalten und damit auch die Imperfektionsempfindlichkeit ist durch eine Vielzahl unterschiedlicher Faktoren beeinflusst. Während bei nicht ausgesteiften Zylindern neben Belastungszustand, Randbedingungen und Materialparametern eine vergleichsweise einfache Geometrie zu berücksichtigen ist, erhöht sich die Komplexität durch eine Anordnung von Steifen erheblich. Dies erschwert einerseits die Formulierung möglichst allgemeingültiger Bemessungsverfahren und kann andererseits dazu führen, dass eine deutliche Abgrenzung unterschiedlicher Beulmuster erzwungen wird. Die von nicht ausgesteiften Schalen bekannte Häufung verschiedener Beulformen bei ähnlichen Lastniveaus treten dann nicht auf, wodurch sich die Identifikation von Verzweigungspunkten mit Hilfe einer begleitenden Eigenwertanalyse vereinfacht [26].

Ziel dieses Kapitels ist, den grundsätzlichen Einfluss aussteifender Elemente auf die Imperfektionsempfindlichkeit von Zylinderschalen sowie deren Berücksichtigung in Normkonzepten zu untersuchen. Dies beinhaltet neben Parameterstudien an längs- und ringversteiften Zylindern auch eine Bewertung der in der Ingenieurpraxis üblichen spannungs-basierten Bemessungsverfahren. Die betrachteten Zylinderschalen sind in den Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3 zusammengefasst. Des Weiteren erfolgt ein Vergleich unterschiedlicher Störungen einer Zylinderschale mit umlaufend versteifter Mantelflächenöffnung mit Bezug auf die numerisch gestützten Nachweisformate der DIN EN 1993-1-6 [12].

Sofern nicht explizit angegeben, sind allen Untersuchungen die SI-Einheiten Newton (N) und Millimeter (mm) sowie die Materialparameter

$$E = 206\,000 \text{ N/mm}^2, \quad \nu = 0,3$$

zugrunde gelegt.

Tabelle 4.1: Untersuchte längsversteifte Zylinder

	Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	ϑ [°]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]
Normierung Störenergie	1-a	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7
	2-a	300	300	1,0	6,0	2,0	4,0	0,57	1,72	190,7
	3-a	300	300	1,0	6,0	3,27	6,55	0,57	1,72	190,7
	4-a	300	300	1,0	4,0	3,0	4,0	0,57	0,76	190,7
	5-a	150	150	0,5	3,0	7,5	30,0	0,57	1,72	190,7
	6-a	300	300	1,0	6,0	15,0	30,0	0,57	1,72	190,7
	7-a	300	300	1,0	9,0	15,0	30,0	0,86	5,80	161,3
	8-a	300	300	1,0	6,0	6,0	12,0	0,57	1,72	190,7
Einfluss Aussteifungsgrad	1-b	150	150	0,5	2,0	1,0	4,0	0,38	0,51	217,1
	2-b	150	150	0,5	2,0	1,5	4,0	0,57	0,76	190,7
	3-b	150	150	0,5	2,0	2,0	4,0	0,76	1,02	170,1
	4-b	150	150	0,5	3,0	2,0	4,0	1,15	3,44	139,8
	5-b	150	150	0,5	3,75	2,0	4,0	1,43	6,71	123,3
	6-b	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7
	7-b	150	150	0,5	1,33	5,06	4,0	1,29	0,76	131,1
	8-b	150	150	0,5	1,5	2,0	4,0	0,57	0,43	190,7
	9-b	150	150	0,5	4,0	0,75	4,0	0,57	3,06	190,7
	10-b	150	150	0,5	6,0	0,5	4,0	0,57	6,88	190,7
Einfluss Randbedingungen	1-c	300	300	1,0	6,0	2,0	4,0	0,57	1,72	190,7
	2-c	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7
Normvergleich	1-d	300	300	1,0	2,31	15,0	4,0	1,65	0,74	113,0
	2-d	300	300	1,0	2,43	12,94	4,0	1,50	0,74	119,9
	3-d	300	300	1,0	3,14	6,0	4,0	0,90	0,74	158,0
	4-d	300	300	1,0	4,01	2,87	4,0	0,55	0,74	193,7
	5-d	300	300	1,0	5,70	1,0	4,0	0,27	0,74	235,8
	6-d	300	300	1,0	7,18	0,5	4,0	0,17	0,74	256,1
	7-d	300	300	1,0	9,40	0,22	4,0	0,10	0,74	272,7
	8-d	400	400	1,0	3,55	5,5	4,0	1,10	0,74	190,5
	9-d	400	400	1,0	2,83	10,84	4,0	0,70	0,74	235,4
	10-d	400	400	1,0	4,43	2,84	4,0	0,45	0,74	275,9
	11-d	400	400	1,0	6,27	1,0	4,0	0,23	0,74	326,6
Interaktion Beulmoden	1-e	600	600	4,0	30,0	4,0	30,0	0,10	0,45	136,9
	2-e	600	600	4,0	30,0	8,0	30,0	0,19	0,90	125,9
	3-e	600	600	4,0	30,0	16,0	30,0	0,38	1,79	108,5
Interaktion Beulmoden	1-f	300	300	1,0	6,0	22,5	45,0	0,57	1,72	190,7
	2-f	300	300	1,0	6,0	15,0	30,0	0,57	1,72	190,7
	3-f	300	300	1,0	6,0	7,2	14,4	0,57	1,72	190,7
	4-f	300	300	1,0	6,0	6,0	12,0	0,57	1,72	190,7
	5-f	300	300	1,0	6,0	5,1	10,3	0,57	1,72	190,7
	6-f	300	300	1,0	6,0	4,5	9,0	0,57	1,72	190,7
	7-f	300	300	1,0	6,0	3,27	6,6	0,57	1,72	190,7
	8-f	300	300	1,0	6,0	2,25	4,5	0,57	1,72	190,7
	9-f	300	300	1,0	6,0	2,0	4,0	0,57	1,72	190,7

Tabelle 4.2: Untersuchte längsversteifte Zylinder (Fortsetzung von Tabelle 4.1)

	Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	ϑ [°]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]
Einfluss Exzentrizität	1-g	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7
	2-g	150	150	0,38	2,25	1,0	4,0	0,57	1,72	252,2
	3-g	300	300	1,0	4,0	3,0	4,0	0,57	0,76	190,7
	4-g	400	400	1,0	4,0	4,0	4,0	0,57	0,76	254,3

Tabelle 4.3: Untersuchte ringversteifte Zylinder

	Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	\bar{b}_{st} [-]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]
Normvergleich	1-h	300	300	2,0	11,4	1,0	0,36	0,27	0,72	831,2
	2-h	300	300	1,0	5,70	1,0	0,50	0,27	0,72	415,6
	3-h	300	300	0,66	3,80	1,0	0,62	0,27	0,72	277,0
	4-h	300	300	0,5	2,85	1,0	0,72	0,27	0,72	207,8
	5-h	300	300	0,4	2,28	1,0	0,80	0,27	0,72	166,2
Einfluss Aussteifungsgrad	1-i	300	300	1,0	5,48	0,78	0,25	0,20	0,50	250,0
	2-i	300	300	1,0	3,87	2,21	0,25	0,40	0,50	214,3
	3-i	300	300	1,0	3,16	4,07	0,25	0,60	0,50	187,5
	4-i	300	300	1,0	2,74	6,26	0,25	0,80	0,50	166,7
	5-i	400	400	1,0	5,48	1,04	0,29	0,20	0,50	333,4
	6-i	400	400	1,0	3,87	2,95	0,29	0,40	0,50	285,7
	7-i	400	400	1,0	3,16	5,42	0,29	0,60	0,50	250,0
	8-i	400	400	1,0	2,74	8,35	0,29	0,80	0,50	222,2

4.1 Normung

In der vor Einführung des Eurocodes gültigen Richtlinie DIN 18800-4 [11] zur Bemessung von Schalen gegen Stabilitätsversagen sind ausgesteifte Schalen nicht normativ geregelt. Dies führte zur Veröffentlichung der DASt-Richtlinie 017 [16], in welcher Nachweisverfahren für die Fälle ringversteifter Zylinder unter allseitigem Außendruck, längsversteifter Zylinder unter Axialdruck und öffnungsrandversteifter Zylinder unter Axialdruck angegeben sind. Die 5. Ausgabe der ECCS-Recommendations von 2013 [18] formuliert zusätzlich Abgrenzungskriterien für die Anwendung der für Zylinder gültigen Bemessungsregeln auf längsversteifte Kegelschalen. Die Angaben für Zylinderschalen entsprechen dabei im wesentlichen denen der DASt-Richtlinie 017 mit einer auf den Eurocode angepassten Terminologie. Eine Bemessung ausgesteifter Zylinder auf Grundlage der ECCS-Recommendations [18] berücksichtigt jedoch nicht den aktuellen Stand der Normung, da der angegebene spannungsbasierte Beulsicherheitsnachweis auf die inzwischen überarbeiteten Regeln für nicht ausgesteifte Schalen zurückgreift. Das Nachfolge-

dokument zur DIN 18800-4, die europäische Norm zur Stabilität von Schalentragwerken DIN EN 1993-1-6 [12] (Eurocode 3), enthält in der aktuellen Fassung von 2017 keine expliziten Regeln für ausgesteifte Schalen.

Neben klassischen spannungsbasierten Bemessungskonzepten finden sich bereits in der DASt-Richtlinie 017 Angaben zu numerisch gestützten Beulsicherheitsnachweisen, welche in modifizierten und erweiterten Fassungen auch in den ECCS-Recommendations sowie im Eurocode enthalten sind. Den Verzicht auf explizite Nachweisformate für ausgesteifte Schalen in den Eurocodes führt SCHMIDT [52] auf die erweiterte Anwendbarkeit der Richtlinie für beliebige Schalengeometrien sowie die zunehmende Verfügbarkeit effizienter Programmsysteme zurück. In Tabelle 4.4 sind die Nachweisformate für eine Bemessung ausgesteifter Zylinderschalen gegen Stabilitätsversagen zusammengefasst.

Tabelle 4.4: Nachweisformate für ausgesteifter Zylinderschalen bei Stabilitätsversagen

	spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis			num. gestützte Formate
	ringversteift (Außendruck)	längsversteift (Axialdruck)	öffnungsrandversteift (Axialdruck)	
DASt 017 [16]	✓	✓	✓	✓
ECCS-R [18]	✓	✓	✗	✓
EC3 [12]	✗	✗	✗	✓

Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis für längsversteifte Zylinderschalen

Nachfolgend wird der spannungsbasierte Beulsicherheitsnachweis für längsversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung nach den ECCS-Recommendations [18] betrachtet. Dieser sieht eine Begrenzung der maßgebenden Meridiandruckspannung vor und umfasst unabhängige Nachweise gegen lokales Beulen der Mantelfläche und globales Beulen der Schale einschließlich der Steifen. Biegedrillknicken und lokales Beulen der Steifen wird durch Abgrenzungskriterien in Abhängigkeit der Steifenquerschnitte ausgeschlossen.

In Tabelle 4.5 sind die im Zusammenhang mit Schalenbeulen geregelten Randbedingungen zusammengestellt. Die Angaben für längsversteifte Zylinder setzen radial und tangential gehaltene Ränder voraus und gelten somit nicht für die Variante BC3. Es ist zu beachten, dass die Randbedingungen für nicht ausgesteifte Schalen definiert wurden und sich die Freiheitsgrade damit auf die Schalenmantelfläche beziehen. Da dem Nachweis-konzept für den Fall globalen Beulens die Annahme flächengleich verschmierter Steifen nach BLOCK et al. [7] zugrunde liegt, ist eine Übertragung auf längsversteifte Zylinder möglich. Im Rahmen numerischer Untersuchungen mittels FEM sind hingegen sowohl für die Mantelfläche als auch für die Steifen Randbedingungen zu wählen. Werden die Längssteifen einer Zylinderschale am Fußpunkt in alle Richtungen gehalten, entsteht daraus auch dann eine Einspannwirkung, wenn die Rotationsfreiheitsgrade der Mantelfläche nicht zu Null vorgegeben sind und für diese formal BC1f bzw. BC2f nach Tabelle 4.5 gilt.

Bei Verwendung des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises ist eine Einspannung von untergeordneter Bedeutung, da in den Bemessungsregeln keine Unterscheidung zwischen gehaltener und freier Randverdrehung vorgesehen ist. Die zugrunde gelegte Theorie verschmierter Steifen basiert auf der Annahme einer gelenkigen Lagerung und liegt für den Fall eingespannter Ränder auf der sicheren Seite. Neben Anwendungsgrenzen, welche aus der Annahme flächengleich verschmierter Steifen folgen und mit der Beulwellenanzahl in Umfangsrichtung ermittelt werden, sind obere Grenzwerte für den Aussteifungsgrad angegeben, da die Regeln für stärker ausgesteifte Schalen nicht ausreichend durch experimentelle Untersuchungen abgesichert sind.

Tabelle 4.5: Randbedingungen nach Normung

ECCS-R [18] / EC3 [12]	Einfache Bezeichnung	Freiheitsgrade
BC1r	eingespannter Rand	$u_1 = u_2 = u_3 = w_\nu = 0$
BC1f		$u_1 = u_2 = u_3 = 0$ $w_\nu \neq 0$
BC2r		$u_1 = u_3 = w_\nu = 0$ $u_2 \neq 0$
BC2f	gelenkiger Rand	$u_1 = u_3 = 0$ $u_2 \neq 0, w_\nu \neq 0$
BC3	freier Rand	$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ $u_3 \neq 0, w_\nu \neq 0$

Die Imperfektionsempfindlichkeit allseitig gehaltener gekrümmter Schalenfelder kann sowohl durch stabiles als auch instabiles Nachbeulverhalten charakterisiert sein. Nach dem von KOITER [32] in Abhängigkeit der Feldbreite b_{st} angegebenen Parameter

$$k_s = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{2\pi} \cdot \frac{b_{st}}{\sqrt{rt}} \quad (4.1)$$

ist für Zylinderschalen mit $k_s \geq 0,64$ ein instabiler Nachbeulpfad vorhanden. Einer mit steigendem k_s zunehmenden Tragfähigkeit, beginnend bei $k_s = 0$ für ebene Plattenstreifen, steht die gleichzeitig wachsende Imperfektionsempfindlichkeit gekrümmter Strukturen gegenüber [80], s. auch Kapitel 4.4.4. Nach den ECCS-Recommendations [18] kann der durch zwei Steifen begrenzte Schalenabschnitt für die Grenzfälle geringer bzw. großer Steifenabstände als allseitig gehaltener Plattenstreifen bzw. als nicht ausgesteifte Zylinderschale betrachtet und mit den entsprechenden Normverfahren gegen lokales Beulen bemessen werden. Als Abgrenzungskriterium dient der Koiter-Parameter mit

$$k_s \leq 1,0 \quad \text{Bemessung als Plattenstreifen nach DIN EN 1993-1-5,}$$

$$k_s \geq 5,0 \quad \text{Bemessung als nicht ausgesteifte Zylinderschale nach DIN EN 1993-1-6.}$$

Für Zwischenwerte ist eine quadratische Interpolationsvorschrift angegeben. Dieses Vorgehen berücksichtigt nicht, dass die Aufweitung axial gestauchter Zylinder infolge Querdehnung durch die Steifen behindert wird. Sind große Steifenabstände vorhanden, kann dies dazu führen, dass lokales Beulen der Schalenfelder bei geringeren Lasten eintritt, als bei nicht ausgesteiften Zylindern mit gleichen Imperfektionsamplituden [49].

Für Schalentragswerke mit $k_s < 5,0$ geht über das Nachweiskonzept der DIN EN 1993-1-5 das überkritische Tragverhalten des allseitig gelagerten Plattenstreifens in die Bemessung ein. Dieses sieht mit steigender Fließspannung eine stetig zunehmende Bemessungsspannung vor. Die mit der teilplastischen Grenzsclankheit λ_p definierte Grenze zwischen elastischem und elasto-plastischem Beulen von nicht ausgesteiften Zylinderschalen ist damit durch die Verknüpfung der Nachweiskonzepte nicht mehr verfügbar.

Der Nachweis gegen globales Beulen der Schalenfelder einschließlich der Längssteifen entspricht dem Verfahren für nicht ausgesteifte Zylinder, wobei die charakteristische Beullast über den globalen Beulabminderungsfaktor χ_{glob} und die verschmierte Wandstärke t_m definiert wird

$$n_{x,Rk} = \chi_{glob} \cdot t_m \cdot f_{y,k}, \quad \chi_{glob} = f(\alpha, \beta, \eta, \lambda, \lambda_0)_{glob}. \quad (4.2)$$

Der Beulabminderungsfaktor basiert auf einer Einteilung in elastisches, elasto-plastisches und plastisches Beulversagen und ist von der bezogenen Schlankheit

$$\lambda_{glob} = \sqrt{\frac{t_m f_{y,k}}{n_{x,Rcr}}} \quad (4.3)$$

sowie den Beulparametern α_{glob} , β_{glob} , η_{glob} und der vollplastischen Grenzsclankheit $\lambda_{0,glob}$ beeinflusst. Die Parameter sind in Abhängigkeit des Aussteifungsgrades angegeben.

Für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Fälle elastischen Beulens erfolgt die Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit nach

$$\chi_{glob} = \frac{\alpha_{glob}}{\lambda_{glob}^2} = \frac{\alpha_{glob} \cdot n_{x,Rcr}}{t_m \cdot f_{y,k}} \quad (4.4)$$

mit einer Abminderung der ideal elastischen Beullast über den empirischen Beulabminderungsfaktor

$$n_{x,Rk} = \alpha_{glob} \cdot n_{x,Rcr}. \quad (4.5)$$

Dabei entspricht α_{glob} für stark versteifte Schalen dem Wert für Zylinder unter gleichmäßiger Manteldruckbeanspruchung, da diese eine ähnliche Imperfektionsempfindlichkeit

aufweisen

$$\alpha_{glob} = 0,65 \quad \text{für} \quad A_{st}/(b_{st}t) \geq 0,2. \quad (4.6)$$

Für eine geringe Aussteifung ist der Beulabminderungsfaktor nicht versteifter Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung α_x zu verwenden. Die Abminderung erfolgt dann in Abhängigkeit der Schlankheit r/t sowie dem Herstellqualitätsparameter Q

$$\alpha_{glob} = \alpha_x = \frac{0,62}{1 + 1,91 \cdot (1/Q \cdot \sqrt{r/t})^{1,44}} \quad \text{für} \quad A_{st}/(b_{st}t) \leq 0,06. \quad (4.7)$$

Bei moderaten Aussteifungsgraden ist eine lineare Interpolation zwischen den Grenzwerten auszuführen.

Die Berechnung von $n_{x,Rcr}$ erfolgt auf Grundlage der von BLOCK et al. [7] veröffentlichten Theorie verschmierter Steifen. Diese setzt eine perfekte Geometrie und kleine Verformungen voraus, berücksichtigt aber die Exzentrizität zwischen Schale und Steifenschwerpunkt [18]. Experimentelle Untersuchungen bestätigen den wesentlichen Einfluss der Exzentrizität auf das Tragverhalten [7], [60], s. auch Kapitel 4.4.5. Die von BLOCK et al. getroffene Annahme geringer Steifenabstände wird durch das Einführen einer effektiven Breite b_e für dünne Schalen und moderate Steifenabstände modifiziert. Zusätzlich erfolgt dadurch die Berücksichtigung von Fällen, in welchen globales Beulen durch vorangehendes lokales Beulen der Schalenfelder eingeleitet wird [49]. Die so formulierte Theorie orthotroper Schalen besitzt nur Gültigkeit, wenn die Steifen unmittelbar am Beulprozess beteiligt sind. Ein entsprechendes Abgrenzungskriterium ist in Abhängigkeit der Anzahl an Beulwellen in Ringrichtung und der Steifenanzahl formuliert. Die effektive Breite b_e ist mit dem Steifenabstand als Startwert iterativ zu ermitteln und geht in die Berechnung der effektiven Querschnittswerte der Steifen ein.

Als unterer Grenzwert für b_e wird die durch von KARMAN [75] für allseitig gehaltene Plattenstreifen ermittelte effektive Breite angegeben. Mit der Annahme, dass sich der mittlere Bereich eines an den Längsrändern gehaltenen Plattenstreifens im Fall des Beulens dem Lastabtrag entzieht, stellt sich eine Spannungskonzentration an den Längsrändern ein. Wird zusätzlich von einer konstanten Spannungsverteilung ausgegangen, ergibt sich die maximal ertragbare Last in Abhängigkeit der Fließspannung zu

$$P_{ult} = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{E f_{y,k}} \cdot t^2. \quad (4.8)$$

Daraus folgt die effektive Breite, welche ebenfalls von der Fließspannung beeinflusst ist, über den Zusammenhang $P_{ult} = b_e t f_y$ mit

$$b_e = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{E}{f_{y,k}}}. \quad (4.9)$$

Sind die Kriterien der Theorie orthotroper Schalen nicht eingehalten, wird für den Nachweis gegen globales Beulen die Anwendung eines vereinfachten Verfahrens empfohlen, in welchem $n_{x,Rcr}$ additiv aus den idealen Beullasten der Steifen und der nicht versteiften Zylinderschale gebildet wird

$$n_{x,Rcr} = \frac{\pi E I_{st}}{\ell^2 \cdot b_{st}} + \psi \cdot t_m \cdot \alpha_x \cdot \sigma_{x,Rcr}. \quad (4.10)$$

Dabei geht die effektive Breite in die Knicklast der Steifen über eine Erweiterung des Steifenquerschnittes um $b_e \cdot t$ ein. Die Berechnung von b_e erfolgt nicht iterativ, sondern direkt nach Gleichung 4.9. Der Faktor ψ berücksichtigt den Einfluss einer internen bzw. externen Aussteifung. Mit $\sigma_{x,Rcr}$ ist die ideal elastische Beullast nach TIMOSHENKO [70] bezeichnet, welche für $\nu = 0,3$ zu

$$\sigma_{x,Rcr} = 0,605 \cdot \frac{Et}{r} \quad (4.11)$$

folgt. Der Beulabminderungsfaktor ist nach Gleichung 4.7 zu ermitteln, wobei die verschmierte Wandstärke t_m anzusetzen ist. Da somit die Anteile der Mantelfläche bereits bei der Berechnung der *ideal* elastischen Beullast $n_{x,Rcr}$ als imperfekt angenommen werden, liegt das vereinfachende Verfahren teilweise stark auf der sicheren Seite. Dies wird besonders am Beispiel rein elastisch beulender Schalen deutlich. Nach Summation der idealen Beullasten in $n_{x,Rcr}$ erfolgt eine erneute imperfektionsbedingte Reduktion zur Berechnung der charakteristischen Beullast nach Gleichung 4.2. Der enthaltene Traganteil der Mantelfläche ist damit zweifach abgemindert. Des Weiteren ist durch die Berücksichtigung der effektiven Breite nach Gleichung 4.9 als Grenzwert im genauen bzw. als Vorgabe im vereinfachenden Verfahren die als *ideal elastisch* bezeichnete Beullast $n_{x,Rcr}$ im Allgemeinen nicht unabhängig von der Fließspannung. Eine eindeutige Abgrenzung zwischen elastischem und elasto-plastischem Versagen liegt damit äquivalent zum Nachweis gegen lokales Beulen nicht vor, obwohl dies durch die teilplastische Grenزشlankheit λ_p suggeriert wird. Bei Überschreiten von λ_p durch λ_{glob} wird von elastischem Beulen ausgegangen und die charakteristische Beulspannung folgt mit α_{glob} und Gleichung 4.4 aus einer Abminderung der idealen Beulspannung. Neben einer undurchsichtigen Nachweisführung hat die genannte Abhängigkeit von $n_{x,Rcr}$ von f_y damit zur Folge, dass aus einer mit steigender Fließspannung abnehmenden effektiven Breite eine Reduktion der Bemessungslast resultiert, wenngleich diese unbeeinflusst sein sollte. Eine unwirtschaftliche Bemessung ist aus diesem Grund besonders bei Verwendung hochfester Stähle zu erwarten.

Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis für ringversteifte Zylinderschalen

Ein Nachweiskonzept für ringversteifte Zylinderschalen unter allseitigem Außendruck ist in den ECCS-Recommendations von 1988 [17] enthalten und wurde, nach einer Modifikation zur Berücksichtigung neuer Forschungsergebnisse, in die DAST-Richtlinie 017 [16]

aufgenommen. Die Angaben der aktuellen Ausgabe der ECCS-Recommendations [18] basieren ebenfalls auf den in der Baupraxis anerkannten Regeln [52]. Durch einen Biegeknicknachweis der Steifen nach Theorie 2. Ordnung unter Berücksichtigung einer geometrischen Ersatzimperfektion und mit Vorgabe einer Mindeststeifigkeit erfolgt die Bemessung derart, dass globales Beulen gegenüber lokalem Beulversagen der Mantelfläche zwischen den Steifen maßgebend wird [16]. Der ideale Beuldruck wird dabei auf Grundlage einer linearen Beultheorie sowie verschmierter Steifen ermittelt und berücksichtigt das Zusammenwirken von Steifen und Mantelfläche. Die Imperfektionsempfindlichkeit für globales elastisches Beulversagen ist damit jedoch nicht allein mit einem von der Schallengeometrie abhängigen Faktor erfasst. Eine direkte Bewertung der enthaltenen Sicherheiten mit Hilfe des Störenergiekonzeptes ist damit nur für lokales Beulversagen möglich, bei welchem das Verfahren für nicht ausgesteifte Schalen angewandt wird. Der anzusetzende Ersatzzylinder hat die Länge des Steifenabstandes und ist an beiden Rändern als wölbfrei und gelenkig gelagert (BC2f) anzunehmen.

Angaben für den Fall reiner Axialdruckbeanspruchung sind in den genannten Regelwerken nicht explizit enthalten. Der Nachweis gegen lokales Beulen kann jedoch ebenfalls anhand der Regeln für unversteifte Zylinder erfolgen. Für den globalen Beulfall können die Gleichungen des unter allseitigem Außendruck stehenden Zylinders herangezogen werden, wobei die Belastungsanteile aus Manteldruck zu vernachlässigen sind. Alternativ ist eine Anwendung der in den ECCS-Recommendations [17] von 1988 enthaltenen Regeln für orthogonal versteifte Zylinder möglich. Dabei dürfen neben dem Manteldruck auch alle aus den Längssteifen resultierenden Steifigkeitsanteile nicht berücksichtigt werden. Beide Varianten führen jedoch im Allgemeinen zu einer stark konservativen Bemessung [3]. Darüber hinaus wurden die Angaben für orthogonal versteifte Schalen aufgrund ihrer Komplexität und der heute umfassenden Verfügbarkeit numerischer Berechnungsverfahren nicht in die Ausgabe der ECCS-Recommendations von 2013 übernommen [52].

Während für längsversteifte Zylinder durch die Verwendung der verschmierte Wandstärke der Aussteifungsgrad indirekt bei einer Bewertung der Imperfektionsempfindlichkeit berücksichtigt wird, ist dies bei Verwendung von Gleichung 4.4 für ringversteifte Zylinder nicht gegeben. JÄGER-CANÁS und PASTERNAK zeigen, dass daraus besonders für hohe Schlankheiten eine unwirtschaftliche Bemessung folgt und schlagen eine Berechnung von α_x unter Berücksichtigung des Aussteifungsgrades vor [26], [27].

Numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis

Erfolgt eine Bemessung auf Grundlage eines numerisch gestützten Beulsicherheitsnachweises nach DIN EN 1993-1-6 [12], sind zwei Konzepte mit unterschiedlicher Berücksichtigung des nichtlinearen Tragverhaltens sowie von Imperfektionen gegeben. Das Stabilitätsverhalten wird durch den Bemessungsbeulwiderstand beschrieben, welcher als Lasterhöhungsfaktor für den Bemessungswert der vorliegenden Einwirkungskombination definiert ist. Eine linear elastische Berechnung von einwirkenden Spannungen mit Hilfe numerischer Verfahren und eine anschließende Anwendung des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises ist in diesem Zusammenhang nicht als numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis zu bezeichnen, da der Beulwiderstand weiterhin analytisch bestimmt wird [52].

Bei einer MNA/LBA-Analyse erfolgt die Betrachtung der perfekten Schale und die Imperfektionsempfindlichkeit wird in Anlehnung an das Vorgehen des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises berücksichtigt. Für den Fall elastischen Beulens folgt der charakteristische Beulwiderstand direkt aus einer Abminderung des ideal elastischen Beulwiderstandes. Letzterer ist mit Hilfe einer Eigenwertanalyse für einen linear elastisch ermittelten Vorbeulzustand (LBA) der perfekten Schale zu bestimmen. Sofern der Beulabminderungsfaktor für den betrachteten Beulfall nicht aus der Literatur entnommen oder auf Grundlage experimenteller Untersuchungen bestimmt werden kann, ist der Wert für unversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung zu verwenden

$$\alpha_x = \frac{0,83}{1 + 2,2 \cdot (1/Q \cdot \sqrt{r/t})^{0,88}}. \quad (4.12)$$

Die Unterschiede zu Gleichung 4.7 nach ECCS-Recommendations [18] sind durch eine zwischenzeitliche Überarbeitung des Nachweiskonzeptes begründet. Das grundsätzliche Vorgehen ist davon unbeeinflusst. Der Einfluss möglicher plastischer Verformungen ist durch die Ermittlung des plastischen Referenzwiderstandes auf Grundlage einer materiell nichtlinearen Berechnung (MNA) zu berücksichtigen.

Ein zweites Nachweiskonzept basiert auf einer GMNIA-Analyse der imperfekten Schale unter Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearitäten. Der Bemessungswiderstand folgt direkt aus der numerischen Behandlung des Stabilitätsproblems, sodass eine gesonderte Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit nicht erforderlich ist. Ein wesentliches Problem stellt jedoch die Identifikation geeigneter geometrischer Ersatzimperfektionen dar, welche die Tragfähigkeit der idealen Struktur ausreichend abmindern, um eine sichere Bemessung zu gewährleisten. Ist eine ungünstigste Imperfektion nicht bekannt, erlaubt das Normverfahren die Verwendung von beulformaffinen Imperfektionen. Die maximale Amplitude wird in Abhängigkeit der Herstelltoleranzen sowie geometrischer Parameter festgelegt. WIRTH [82] zeigt anhand axial gestauchter Zylinder mit Mantelflächenöffnung jedoch, dass die tatsächliche Beullast der realen Struktur durch dieses Vorgehen unter Umständen überschätzt wird. Gleiches gilt für die

mit einer GMNA-Berechnung ermittelte quasi-kollapsaffine Imperfektion. Diese ist im Normverfahren nicht als Imperfektionsform vorgesehen, kann aber, besonders bei ausgeprägter materieller Nichtlinearität, zu einem geringeren Bemessungswiderstand führen, als eine beulformaffine Imperfektion [56].

4.2 Einflussfaktoren

Bedingt durch den approximativen Charakter der Finite Elemente Methode ist eine ermittelte Störenergie durch die gewählte Diskretisierung beeinflusst. KNOKE [31] und PONTOW [46] betrachten in diesem Zusammenhang gemischte Elemente mit linearen bzw. quadratischen Ansatzfunktionen am Beispiel nicht ausgesteifter Schalentragwerke. Ziel des nachfolgenden Kapitels ist es, das Konvergenzverhalten der vorgestellten gemischt-hybriden Elemente sowie die Verwendung von Berechnungsausschnitten bei der Modellierung ausgesteifter Schalen anhand des in Abbildung 4.1 dargestellten längsversteiften Zylinders zu untersuchen. Die gezeigten Lagerungsvarianten sind in Tabelle 4.6 beschrieben, wobei sich die Richtungen der angegebenen Verschiebungen auf die Flächenkoordinaten der Mantelfläche beziehen. Sowohl die Weggrößen- als auch die Krafrandbedingungen gelten für den gesamten Rand und werden für Steifen und Mantelfläche identisch vorgegeben. Die Belastung erfolgt mit einer konstanten Spannung $\bar{\sigma}$ in Meridianrichtung.

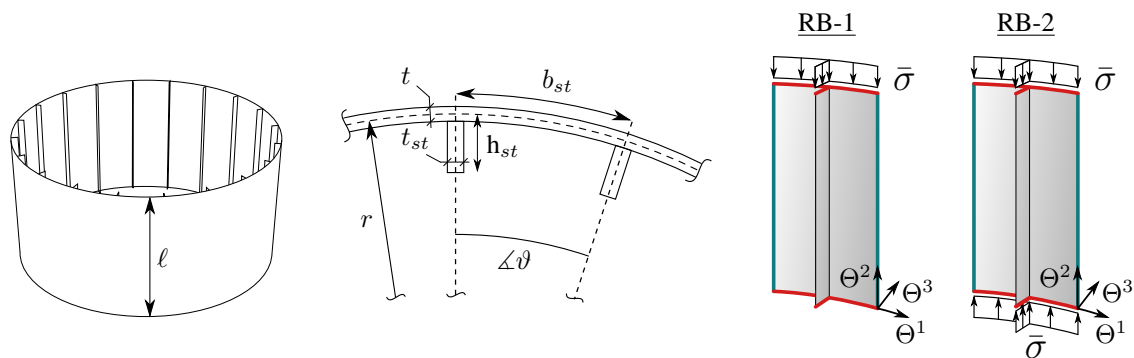


Abbildung 4.1: Zylinder mit internen Längssteifen

Tabelle 4.6: Lagerungsvarianten RB-1, RB-2 und RB-2*

	RB-1			RB-2			RB-2*
	$\Theta^2 = 0$	$\Theta^2 = \ell$	symm.	$\Theta^2 = 0$	$\Theta^2 = \ell$	symm.	
u_1	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	$\hat{=}$ RB-2 ohne direkte Belastung der Steifen mit $\bar{\sigma}$
u_2	= 0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	
u_3	= 0	= 0	$\neq 0$	= 0	= 0	$\neq 0$	
\tilde{w}_ν	$\neq 0$	$\neq 0$	= 0	$\neq 0$	$\neq 0$	= 0	
EC3	BC1f	BC2f	-	BC2f	BC2f	-	

4.2.1 Diskretisierung der Schalenmantelfläche

Der Einfluss der Diskretisierung des elastischen Potentials auf die Ergebnisse einer Stabilitätsanalyse wird anhand des von KNOKE [31] angegebenen Elementierungsgrades k_{Ele} untersucht. Aus der über das Abklingverhalten der linearen Biegetheorie bestimmbaren Periodenlänge T folgt die Elementlänge mit

$$l_e = \frac{T}{2 \cdot k_{Ele}}, \quad T = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{r \cdot t}}. \quad (4.13)$$

Das Kriterium berücksichtigt mit der Abhängigkeit von Element- und Periodenlänge, dass das Abklingverhalten von der geometrischen Schlankheit r/t beeinflusst ist. Bei konstantem k_{Ele} folgt aus einer abnehmenden Periodenlänge eine entsprechend feinere Diskretisierung. Die Vernachlässigung der Membrantragwirkung ist gerechtfertigt, da kritische Störungen im Wesentlichen Biegestörungen hervorrufen [46]. Die Anzahl der Elemente auf einer halben Periodenlänge k_{Ele} ist in Abhängigkeit der verwendeten Elementformulierung zu ermitteln. Für gemischte Elemente mit bilinearen bzw. biquadratischen Ansätzen kann $k_{Ele} = 6$ bzw. $k_{Ele} = 3$ als hinreichend genau betrachtet werden [31], [46]. Die Bewertung der Diskretisierung mit den vorgestellten gemischt-hybriden Elementen erfolgt anhand einer axial gestauchten Zylinderschale ohne Aussteifung mit den Geometrieparametern $r = 150$ mm, $l = 150$ mm und $t = 1$ mm und Lagerungsvariante RB-1.

Abbildung 4.2 zeigt die Entwicklung der Störenergie mit steigendem Elementierungsgrad. Als Bezugsgröße für die Belastung $\bar{\sigma}$ ist die klassische Beullast nach TIMOSHENKO [70]

$$\sigma_{cl} = \frac{Et}{r \cdot \sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

gewählt. Die Differenzen in den Kurvenverläufen der Störenergie sind vom Lastniveau abhängig und im Rahmen der Zeichengenauigkeit nur für den kleinsten Elementierungsgrad erkennbar.

Ebenfalls dargestellt ist die Konvergenz der Beullast im Verzweigungspunkt σ_{ki} sowie der Grenzlast σ_{cr} für eine bezogene Störenergie von $\pi_{st} = 2,7\%$. Für die Normierung der Störenergie sei auf Kapitel 4.3 verwiesen. Als Vergleichsgrößen sind die relativen Differenzen für gemischte Elemente mit bilinearen sowie biquadratischen Ansätzen angegeben. Diese wurden von KNOKE [31] an einem axial gestauchten Zylinder und PONTOW [46] an einer Kugelschale unter Radialdruck mit jeweils $r/t = 100$ ermittelt. Durch die Berücksichtigung der Schlankheit im Elementierungsgrad nach Gleichung 4.13 ist deren Einfluss auf die relative Differenz jedoch gering, sodass ein direkter Vergleich mit der hier verwendeten Schlankheit von $r/t = 150$ möglich ist [31], [46].

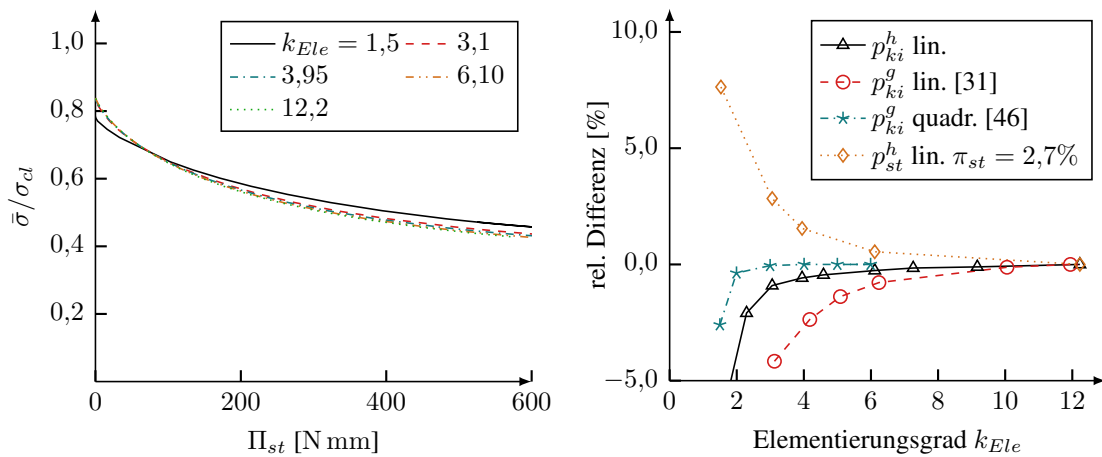


Abbildung 4.2: Einfluss der Diskretisierung auf die Störenergie sowie Beul- und Grenzlasten

Während die Beullast für eine biquadratische Beschreibung der Feldgrößen erwartungsgemäß schneller konvergiert als für bilineare Ansatzfunktionen, ist die gemischt-hybride Formulierung mit bilinearer Approximation der Weggrößen den vergleichbaren gemischten Elementen überlegen. Ab $k_{Ele} = 6$ ist mit einer relativen Differenz von 0,26‰ bzw. 0,56‰ für die Beul- bzw. Grenzlast nur noch ein geringer Unterschied vorhanden, sodass dieser Elementierungsgrad den nachfolgenden Berechnungen zugrunde gelegt wird.

Tritt bei ausgesteiften Schalen lokales Beulen der Mantelfläche zwischen den Steifen auf, kann der Einfluss der Diskretisierung ebenfalls mit k_{Ele} beschrieben werden. Dabei ist zu beachten, dass die Steifen auch bei lokalem Stabilitätsversagen Zwänge hinsichtlich möglicher Beulformen in das System einbringen. Die Beulwellenlänge ist damit unter Umständen geringer, als für die nicht ausgesteifte Schale. Für diese Fälle ist die Vergleichbarkeit von Berechnungsergebnissen für die gewählte Diskretisierung gegebenenfalls durch weitere Untersuchungen sicherzustellen.

4.2.2 Diskretisierung der Steifen

Die Bewertung des diskretisierungsbedingten Fehlers für aussteifende Tragwerksteile erfolgt für die gerade Längssteife der axial gestauchten Zylinderschale. Entlang des Koppelungsrandes zwischen Steifen und Mantelfläche ist die Elementlänge für beide Teilsysteme identisch, sodass die Schale unter Umständen feiner zu diskretisieren ist, als durch den Elementierungsgrad k_{Ele} gefordert. Um den Einfluss der Diskretisierung der Steifen auf die Identifikation von Beul- und Grenzlasten zu bewerten, sind verschiedene Versagensfälle mit unterschiedlicher Beteiligung der Steifen zu betrachten.

Tritt lokales Beulen zwischen den Steifen auf, ist das Tragverhalten der Schalenfelder maßgebend, s. Kapitel 4.2.1. Bei schlanken Steifenquerschnitten kann das Stabilitätsverhalten jedoch von lokalem Beulen der Steifen ohne wesentliche Verformungen der Schalenmantelfläche dominiert sein. Der an die Schalenmantelfläche grenzende Rand ist dabei

elastisch eingespannt, wobei der Einspanngrad von der Biegesteifigkeit sowie möglichen Verformungen der Schale abhängt und im Allgemeinen nicht bekannt ist. Wird die Steife vereinfachend als ein dreiseitig gelagerter Plattenstreifen betrachtet, folgt nach einer verallgemeinerten technischen Biegetheorie eine minimale Beulwellenlänge in Längsrichtung für den Grenzfall einer vollständigen Einspannung [50]. Die Periodenlänge ist für diese Lagerungsbedingung ausschließlich von der Breite des Plattenstreifen abhängig. Wird der Elementierungsgrad $k_{Ele,st}$ als Elementanzahl auf einer halben Periodenlänge T_{st} definiert, ergibt sich die Elementlänge in Abhängigkeit der Steifenhöhe h_{st} zu

$$l_e = \frac{T_{st}}{2 \cdot k_{Ele,st}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{h_{st}}{k_{Ele,st}}. \quad (4.14)$$

Somit ist mit sinkender Steifenhöhe eine zunehmend feinere Elementierung notwendig, um das Beulverhalten gleichmäßig zu erfassen.

Der Einfluss der Diskretisierung bei lokalem Beulen wird anhand eines Plattenstreifens unter gleichmäßiger Druck- sowie reiner Biegebeanspruchung um die Plattennormale untersucht. Der zweite Fall berücksichtigt, dass die Steifen durch eine radiale Aufweitung der in Längsrichtung gestauchten Schale eine Scheibentragwirkung entwickeln. Die Verschiebungen u_1 und u_3 sind an beiden Quer- und an einem Längsrand zu Null vorgegeben, wobei sich die Richtungen auf das in Abbildung 4.1 dargestellte Koordinatensystem beziehen.

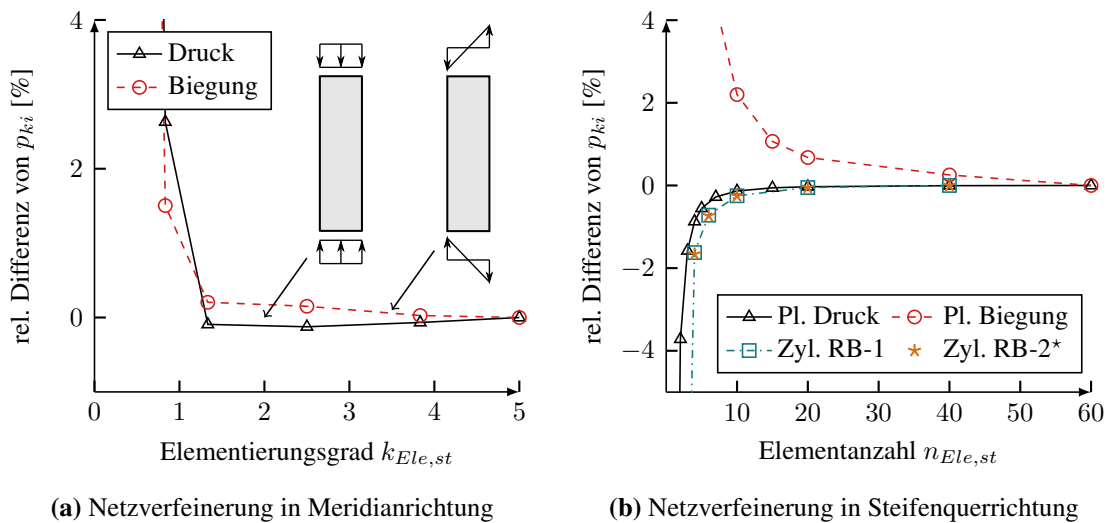


Abbildung 4.3: Einfluss der Diskretisierung auf die Beullast bei lokalem Beulen einer Steife

Abbildung 4.3a zeigt die Beullasten für den Plattenstreifen bei einer Netzverdichtung in Meridianrichtung. Beide kurzen Ränder sind identisch belastet, sodass eine Modellierung unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften möglich ist. Die Elementanzahl ist in Längsrichtung über den Elementierungsgrad festgelegt und beeinflusst maßgeblich die Abbildung der Beulform. Der gewählte Bezugswert entspricht mit $k_{Ele,st} = 5,0$ einer Vernetzung mit 60 Elementen. In Querrichtung ist $n_{Ele} = 20$ gewählt. Für einen Elemen-

tierungsgrad ab $k_{Ele,st} = 2,5$ liegt die relative Differenz für beide Lastfälle unterhalb von 0,15%. Die Art der Belastung hat nur einen geringfügigen Einfluss auf die Ergebnisse, da die Beulwellenlänge davon unbeeinflusst ist [50]. Für die in Abbildung 4.3b dargestellte Konvergenzuntersuchung bei einer Netzverdichtung in Querrichtung ist der Plattenstreifen in Längsrichtung mit 60 Elementen diskretisiert. Infolge der linearen Spannungsverteilung in Querrichtung konvergiert die Lösung für die Biegebeanspruchung langsamer als bei gleichmäßiger Druckbeanspruchung.

Um den Einfluss des tatsächlichen Belastungszustandes der Steifen im Steife-Schale-Verbund zu bewerten, ist in Abbildung 4.3b zusätzlich die Konvergenz der Beullast für ein ausgesteiftes Zylindersegment dargestellt. Die Abmessungen sind derart gewählt, dass lokales Beulen der Steife maßgebend wird. Ein Vergleich mit den Beullasten des Plattenstreifens zeigt, dass der Anteil der Druckbeanspruchung im Gesamttragwerk dominiert. Das Zylindersegment ist für die Fälle einer beidseitigen sowie einseitigen Belastung mit entsprechend wölbfreier bzw. nicht wölbfreier Lagerung betrachtet. Die Bezeichnungen der Lagerungsvarianten beziehen sich auf Abbildung 4.1 und Tabelle 4.6, wobei hier für RB-2* keine direkte Belastung der Steife erfolgt und die Druckkraft ausschließlich über die Mantelfläche eingetragen wird. Ein wesentlicher Einfluss der Lagerung auf die Konvergenz der Beullast ist nicht erkennbar. Die in Abbildung 4.4 dargestellten Beulformen zeigen, dass sich die Amplitude durch die am Schalenfuß nicht wölbfreie Lagerung für RB-1 aus der Schalenmitte in Richtung des belasteten, in Meridianrichtung nicht gehaltenen Randes verschiebt. Die Beulwellenlänge ist nahezu unbeeinflusst.

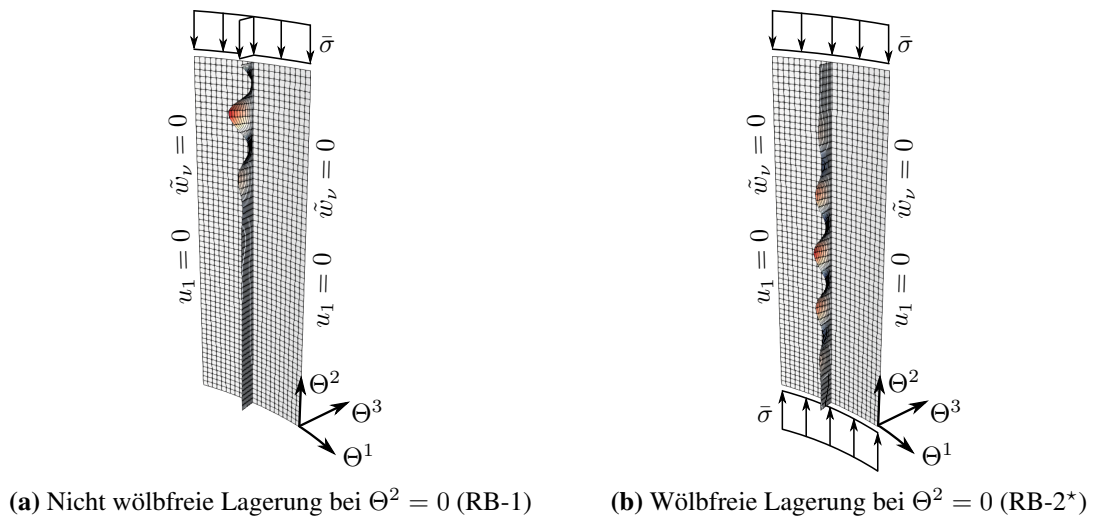


Abbildung 4.4: Beulformen bei lokalem Beulen einer Steife für $n_{Ele,st} = 10$

Eine weitere mögliche Versagensart stellt globales Beulen dar, bei welchem sich die Beulform großflächig über mehrere Schalenfelder erstreckt und die Steifen entsprechende Verformungen in radialer Richtung aufweisen. Dieser Fall tritt bei stark ausgesteiften Schalen mit geringen Steifenabständen auf, welche vereinfachend als nicht ausgesteifte Schalen mit erhöhter Wandstärke betrachtet werden können. Da globales Beulen eine Vergrößerung der Periodenlänge gegenüber lokalem Beulen der Mantelfläche zur Folge hat und

auch keine kurzwellige Verformungsfigur der Steifen auftritt, liegt eine Elementierung auf Grundlage lokalen Beulens der Schalenmantelfläche auf der sicheren Seite.

Mit dem Ziel die numerischen Kosten zu reduzieren und unter der Berücksichtigung, dass lokales Beulen der Steifen im Rahmen einer wirtschaftlichen Bemessung von untergeordneter Bedeutung ist, wird für alle folgenden Untersuchungen $n_{Ele,st} = 4$ gewählt und in Meridianrichtung die durch die Mantelfläche vorgegebene Diskretisierung als maßgebend betrachtet.

Charakteristisch für die im Rahmen des Störenergiekonzeptes auftretenden Störungen sind vergleichsweise große Biegeverformungen der Mantelfläche. Bedingt durch die damit einhergehenden radialen Verschiebungen der Steifen kann ein wesentlicher Anteil der Störenergie auf diese entfallen und ein entsprechender Einfluss der Diskretisierung vorhanden sein. Eine vergleichende Untersuchung zeigt jedoch, dass für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Beulfälle für $n_{Ele,st} > 4$ keine wesentliche Änderung der Störenergie auftritt. Beinhaltet die Störform deutliche Biegeverformungen der Steifen mit Beulwellenlängen unterhalb von T_{st} , ist der gewählte Elementierungsgrad mit Bezug auf die Konvergenz der Störenergie gegebenenfalls genauer zu untersuchen.

4.2.3 Berechnungsausschnitt

Für Untersuchungen an nicht ausgesteiften Rotationsschalen ist in vielen Anwendungsfällen die Modellierung eines Berechnungsausschnittes unter Vorgabe entsprechender Symmetrierandbedingungen ausreichend. Im Rahmen des Störenergiekonzeptes folgt daraus für den Fall lokal begrenzter Störungen der Vorteil, dass die mit dem kleinsten Eigenwert beschriebene kritische Störung auf einem der beiden Symmetrieränder lokalisiert ist. Die zugehörige Störenergie ist nur halb so groß, wie bei einer Modellierung der gesamten Schale. Durch Vorgabe eines geeigneten Startvektors kann die gesuchte Störung entsprechend schnell iterativ ermittelt werden. Sofern die Biegeverformungen innerhalb des Berechnungsausschnittes weitestgehend abgeklungen sind, ist die Störenergie damit hinreichend genau erfasst.

Wird eine in Meridianrichtung ausgesteifte Rotationsschale betrachtet, ist das Gesamttragwerk nicht rotationssymmetrisch. Dadurch werden bei Modellierung eines Schalen-ausschnittes und Vorgabe von Symmetrierandbedingungen zusätzliche Zwänge hinsichtlich möglicher Beul- und Störformen in das System eingebracht. Deren Einfluss ist nachfolgend anhand einer Zylinderschale mit variierender Steifenanzahl und den Geometrieparametern

$$r = 150 \text{ mm}, \quad l = 150 \text{ mm}, \quad t = 1 \text{ mm}, \quad h_{st} = 7,5 \text{ mm}, \quad t_{st} = 2 \text{ mm}$$

untersucht. Abbildung 4.5 zeigt Beulformen für einen Zylinder ohne bzw. mit $n_{st} = 10$ Längssteifen ($\vartheta = 36^\circ$) bei einer Modellierung eines 180° - bzw. 360° -Ausschnittes so-

wie der Randbedingungsvariante RB-1. Durch die Rotationssymmetrie der nicht ausgesteiften Schale ist mit jeweils zwei gegenüber liegenden Halbwellen eine Symmetrieachse des Beulmusters beschrieben. Das Tragverhalten im Verzweigungspunkt wird damit bei Modellierung eines 180°-Ausschnittes vollständig erfasst. Für die ausgesteifte Schale stellen sich innerhalb eines Segmentes zwei Halbwellen ein. Die Beulform ist damit punktsymmetrisch und kann bei einer Modellierung als 180°-Ausschnitt und Vorgabe von $\tilde{w}_\nu = u_1 = 0$ an den mittig zwischen zwei Steifen liegenden Rändern nicht vollständig abgebildet werden. Dennoch ist die Abweichung der Beullast für die gezeigte ausgesteifte Schale mit $\approx 0,5\%$ gering. Im Allgemeinen ist der durch den Berechnungsausschnitt bedingte Fehler jedoch von der betrachteten Schale abhängig und im Einzelfall zu überprüfen.

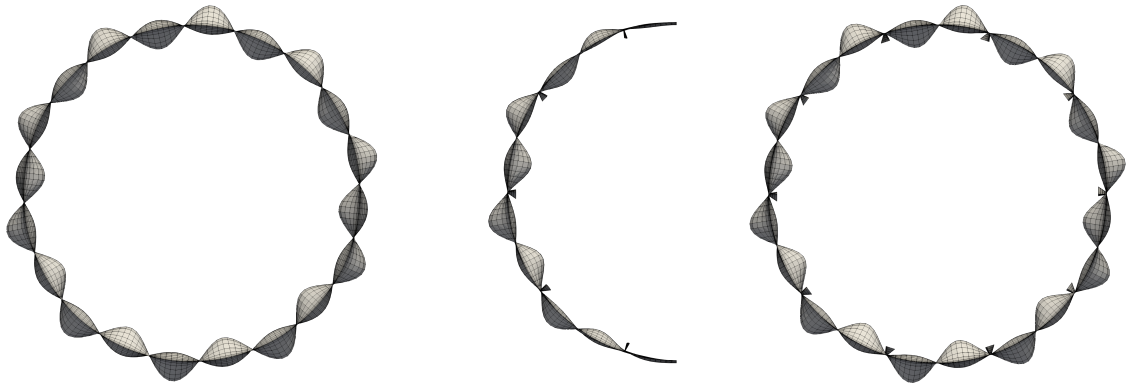


Abbildung 4.5: Beulformen in Abhängigkeit des Berechnungsausschnittes für $\vartheta = 36^\circ$

Der Einfluss des Berechnungsausschnittes auf die Störenergie ist für $n_{st} = 8$ Steifen ($\vartheta = 45^\circ$) untersucht. Abbildung 4.6 zeigt die überhöhten Störformen bei Modellierung eines 180°- bzw. 360°-Ausschnittes für eine Belastung von $\bar{\sigma} \approx 0,90 \cdot \sigma_{ki} = 700 \text{ N/mm}^2$. Die Amplitude der Einzelbeule ist bei Vorgabe eines entsprechenden Startvektors für den Halbzylinder auf dem Symmetrierand und damit exakt zwischen zwei Steifen lokalisiert. Wird der gesamte Zylinder modelliert, befindet sich die maximale radiale Verschiebung der Schale hingegen dichter an einer Steife, sodass innerhalb eines Schalensegmentes zwei Halbwellen auftreten. Die Wendepunkte der Störform befinden sich an den Anschlussstellen der Steifen.

Infolge der unsymmetrischen Störform des Vollzylinders sind die angrenzenden Steifen im wesentlichen durch Biegung und Torsion beansprucht, während für den Halbzylinder auch deutliche radiale Verschiebungen erkennbar sind. Da diese Verformungsfigur eine größere Steifigkeit anspricht, wird die Imperfektionsempfindlichkeit mit der am 180°-Ausschnitt ermittelten Störenergie unterschätzt. Abbildung 4.7 zeigt die entsprechende Differenz in den Kurvenverläufen von Π_{st} für das gesamte Tragwerk in Abhängigkeit der Grundbelastung. Eine Aufteilung der Störenergie der Steifen in Membran- und Biegeanteile macht deutlich, dass der dominierende Anteil für den Vollzylinder durch Biegeenergie und für den Zylinderausschnitt durch Membranenergie repräsentiert wird, s. Abbildung 4.8.

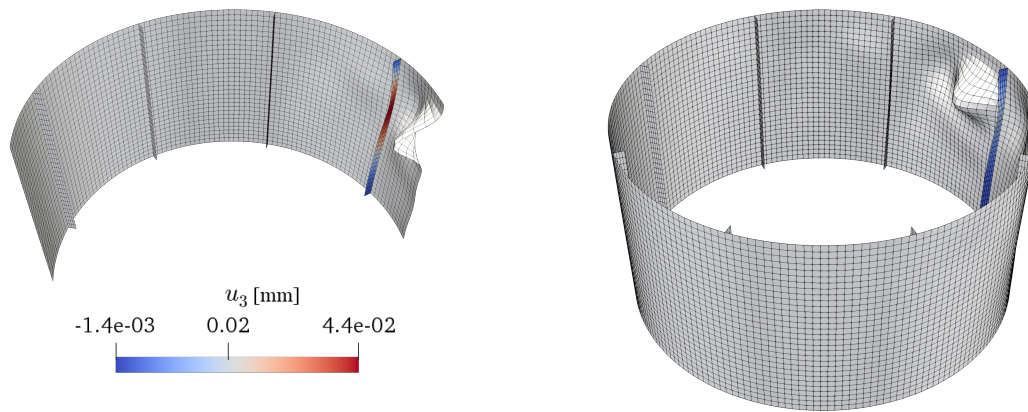


Abbildung 4.6: Störformen in Abhängigkeit des Berechnungsausschnittes für $\vartheta = 45^\circ$

Die Untersuchungen zeigen, dass mit einer Modellierung von Teilsystemen das Stabilitätsverhalten lokal beulender ausgesteifter Schalen unter Umständen nicht richtig erfasst wird. Damit die Imperfektionsempfindlichkeit zuverlässig bewertet werden kann, wird empfohlen eventuelle Symmetrieanahmen durch vorangehende Untersuchungen an einem vollständigen Modell zu rechtfertigen.

Für stark versteifte Zylinderschalen, bei welchen globales Beulen maßgebend wird, nähert sich das Tragverhalten dem der unversteiften Schale mit einer entsprechend erhöhten Wandstärke an. Die durch Symmetrierandbedingungen eingebrachten Zwänge hinsichtlich möglicher Beul- und Störformen werden dadurch abgeschwächt und es gelten näherungsweise die gleichen Zusammenhänge wie für nicht ausgesteifte Zylinder, s. [72]. Es ist jedoch zu beachten, dass sich das Abklingverhalten einer lokal begrenzten Störung durch die indirekt erhöhte Wandstärke erheblich verändern kann.

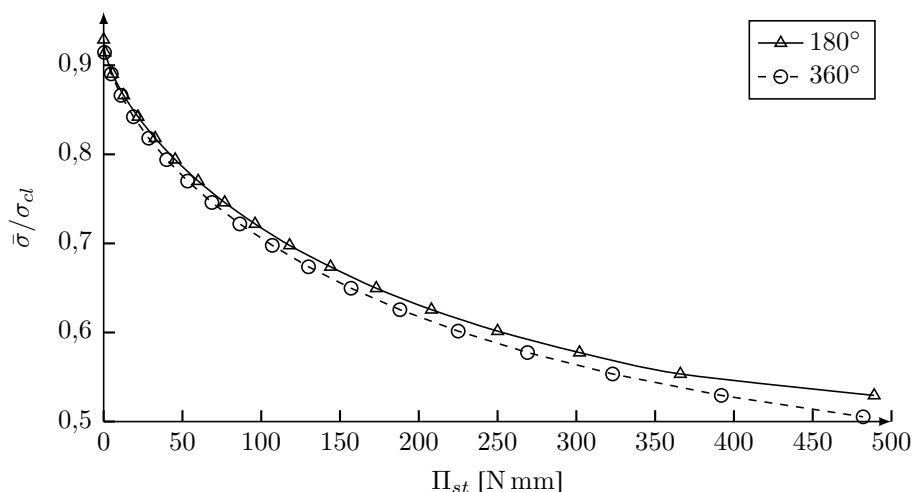


Abbildung 4.7: Störenergie der ausgesteiften Schale in Abhängigkeit des Berechnungsausschnittes

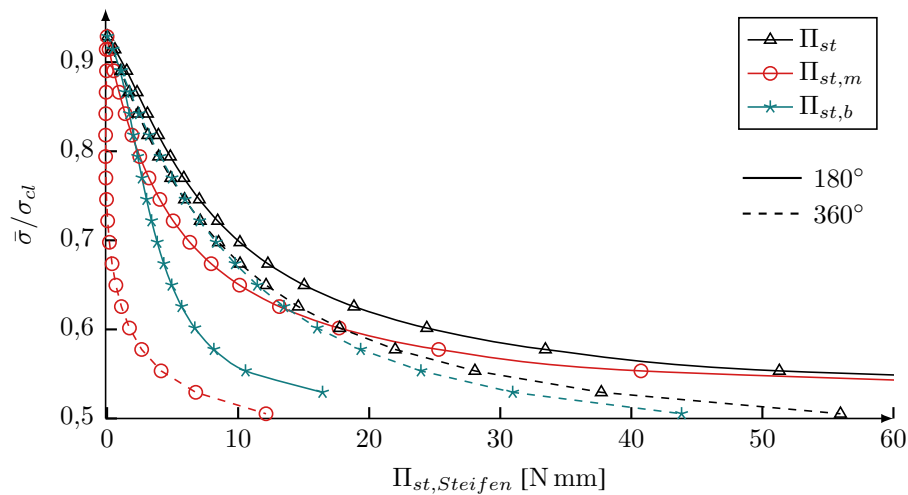


Abbildung 4.8: Störenergie der Steifen in Abhängigkeit des Berechnungsausschnittes

4.2.4 Startvektor für die Eigenwertiteration

KNOKE [31] untersucht am Beispiel axial gestauchter Zylinderschalen den Einfluss des Startvektors auf die iterative Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems. Für diesen Beulfall wird die kritische Störung mit der Vorgabe einer nach innen gerichteten radialen Verschiebung für eine Vielzahl unterschiedliche Knoten sicher ermittelt. Dennoch wird eine Plausibilitätskontrolle der Störform empfohlen, um auszuschließen, dass infolge des gewählten Startvektors die Konvergenz gegen ein lokales Minimum der Störenergie erfolgt. Darüber hinaus ist es in der Regel vorteilhaft, eine erste kritische Störung für Lastniveaus kurz unterhalb des Verzweigungspunktes zu ermitteln, da der Abstand zwischen grund- und kritischem Zustand mit steigendem Lastniveau abnimmt. Eine anschließende Reduktion der Belastung bei gleichzeitiger Vorgabe der zuvor ermittelten kritischen Störung führt dazu, dass weniger Iterationsschritte benötigt werden als bei Verwendung eines identischen Startvektors für jede Laststufe [31].

Die Anwendung des Störenergiekonzeptes zeigt, dass das beschriebene Vorgehen in Einzelfällen dazu führt, dass die qualitative Veränderung der Störung in Abhängigkeit des Grundzustandes nicht vollständig erfasst wird. In der Folge können Fälle auftreten, in welchen die ermittelte Störung nicht mit dem absoluten Minimum der Störenergie assoziiert ist. Abbildung 4.9 macht dies am Beispiel einer ausgesteiften Zylinderschale mit Lagerungsvariante RB-1 nach Tabelle 4.6 deutlich. Die Störenergieverläufe sind für ein zu- bzw. abnehmendes Niveau der Grundbelastung ermittelt, wobei der Startvektor für den jeweils ersten Grundzustand als einzigen von Null verschiedenen Eintrag eine Verschiebung von $u_3 = -1$ mm in Zylindermitte enthält. Für die folgenden Lastniveaus ist die zuvor ermittelte Störung als Startvektor vorgegeben.

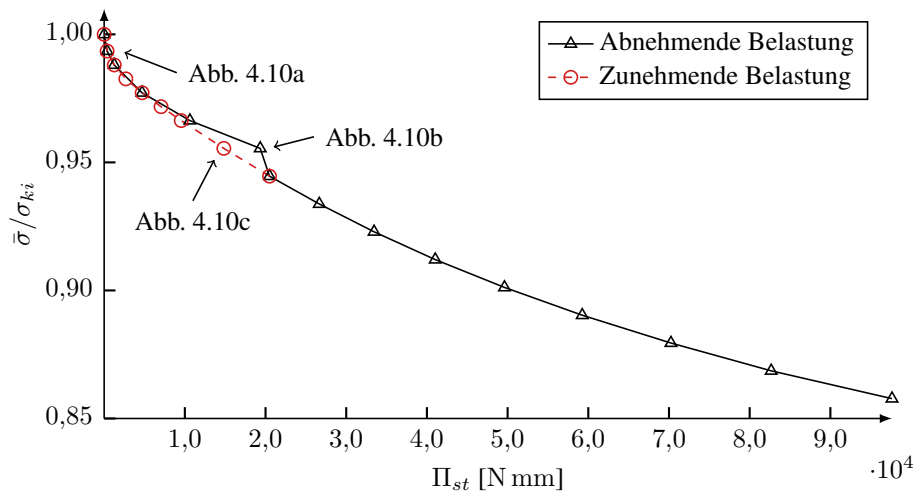


Abbildung 4.9: Störenergieverläufe in Abhängigkeit des Startvektors

In der Nähe des Verzweigungspunktes sind die berechneten Störenergien für beide Vorgehensweisen identisch und die zugehörigen Störformen zeigen ein in Umfangsrichtung gleichmäßig verteiltes Wellenmuster, welches für $\Pi_{st} = 0$ der Beulform entspricht, s. Abbildung 4.10a. Bei sukzessiver Reduktion der Grundbelastung bleibt die Störform qualitativ bestehen, bis sich, unter einer sprunghaften Veränderung der Störenergie, für $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} = 0,94$ eine in Umfangsrichtung abklingende Einzelbeule einstellt. Wird die erste kritische Störung hingegen für $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} = 0,94$ bestimmt und anschließend Grundzustände mit steigendem Lastniveau betrachtet, kann der graduelle Übergang von einer lokal begrenzten Einzelbeule zur gleichmäßig verteilten Beulform zutreffend abgebildet werden. Die in den Abbildungen 4.10b und 4.10c dargestellten Störformen sind für ein Grundlastniveau von $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} = 0,96$ ermittelt und machen den Einfluss des Startvektors deutlich.

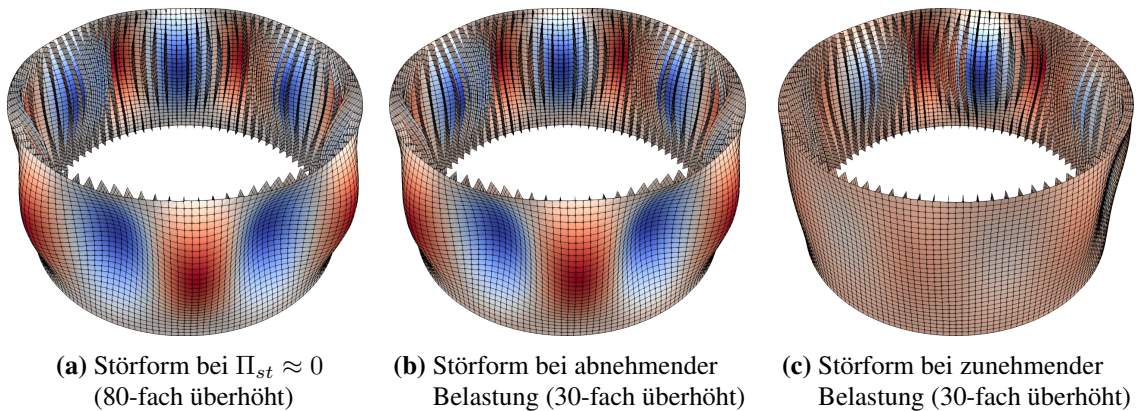


Abbildung 4.10: Störformen bei $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} = 0,99$ (a) und $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} = 0,96$ (b), (c)

4.3 Normierung der Störenergie

Die Störenergie beschreibt die Imperfektionsempfindlichkeit eines im Grundzustand G befindlichen Tragwerkes und ist als Formänderungsenergie eine dimensionsbehaftete Größe, welche von den physikalischen Eigenschaften der betrachteten Schale abhängig ist. Die Überführung in eine dimensionslose Größe mit einer geeigneten Normierung ermöglicht es, ein allgemeineres Beulkriterium zu formulieren, welches auf Schalen mit unterschiedlichen geometrischen und materiellen Parameter übertragbar ist. SPOHR [61] schlägt für Zylinderschalen eine Normierung auf Grundlage der Biegesteifigkeit vor,

$$\pi_{st} = \frac{\Pi_{st}}{B^*} \quad \text{mit} \quad B^* = \alpha_l \cdot \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.15)$$

Die bezogene Störenergie π_{st} ist für Zylinderschalen mit gleicher geometrischer Schlankheit r/t und für gleiche Niveaus der bezogenen Grundbelastung $\bar{\sigma}/\sigma_{ki}$ identisch. Sie bildet somit die in Versuchen beobachtete vergleichbare Abnahme der idealen Beullast infolge unvermeidbarer Imperfektionen für unterschiedliche Schalengeometrien bei gleichem r/t -Verhältnis ab. Ein mit $\pi_{st} = konst.$ definiertes Beulkriterium beschreibt damit über das zugehörige Grundlastniveau, welches für jede Schale individuell zu ermitteln ist, die maximal ertragbare Belastung für das zugrunde gelegte Sicherheitsniveau.

Der Faktor α_l in Gleichung 4.15 soll den Längeneinfluss bei Zylinderschalen berücksichtigen und ist für die Lastfälle Axialdruck, Radialdruck und Torsion über das Verhältnis der Beullast des untersuchten Zylinders zur Beullast eines Referenzzylinders mit $l/r = 1$ definiert. Untersuchungen von KNOKE [31] zeigen jedoch, dass die Berücksichtigung des Längeneinflusses in der Normierungsvorschrift für axial gestauchte Zylinderschalen aufgrund des lokalen Charakters der Störform nicht sinnvoll ist. Die Lage der Einzelbeule in meridionaler Richtung und damit auch der Einfluss der Randstörung ist sowohl von der geometrischen Schlankheit r/t als auch vom Längenverhältnis l/r abhängig und variiert für unterschiedliche Lastniveaus. Ein Beulkriterium für diesen Lastfall ist damit nur für ein definiertes Längenverhältnis gültig. Bei Radialdruck bzw. Torsionsbeanspruchung sind die Störformen hingegen über die gesamte Zylinderschale ausgedehnt und der Längeneinfluss kann mit $\alpha = l/r$ (Radialdruck) bzw. $\alpha_l = \sqrt{l/r}$ (Torsion) in der Normierungsvorschrift berücksichtigt werden [31]. PONTOW [46] zeigt, dass die Biegeenergie den dominierenden Anteil der Störenergie darstellt und liefert damit eine phänomenologische Begründung für die Normierungsvorschrift.

Für axial gestauchte Zylinder mit einseitig wölbfreier Lagerung ist kein direkter proportionaler Zusammenhang zwischen Störenergie und Querdehnzahl vorhanden. Bei $\nu = 0$ befindet sich die Einzelbeule der Störform unmittelbar am belasteten wölbfrei gelagerten Rand. Mit steigender Querdehnzahl nimmt der Einfluss der Randbedingung auf die kritische Störung zu und die Einzelbeule entfernt sich zunehmend vom Zylinderrand. Die vorgeschlagene Normierung ist somit für eine Anwendung auf Tragwerke mit variierenden Querdehnzahlen im Einzelfall zu verifizieren [46].

Ausgesteifte Zylinderschalen

Bei der Bewertung der Normierungsvorschrift für ausgesteifte Schalen wird nachfolgend der Aussteifungsgrad $\bar{A}_{st} = A_{st}/(b_{st}t)$ sowie das Verhältnisse von Radius r zu verschmierter Wandstärke t_m in die Betrachtungen einbezogen. Während die wesentliche Abhängigkeit der Imperfektionsempfindlichkeit von \bar{A}_{st} nach SINGER et al. [59] experimentell bestätigt ist, ist ein Einfluss von r/t_m ebenfalls zu erwarten. Als weitere Aussteifungskennzahl wird das bezogene Flächenträgheitsmoment $\bar{I}_{st} = I_{st}/(b_{st}t^3)$ herangezogen. Diese berücksichtigt den Einfluss der Steifenhöhe bei konstanter Querschnittsfläche.

Nachfolgend sind die in Tabelle 4.7 zusammengefassten Zylinderkonfigurationen untersucht. Um eine unterschiedlich starke Einspannwirkung durch eine in u_2 -Richtung unverschiebbliche Lagerung bei variierender Steifenhöhe zu vermeiden, sind die Randbedingungen mit RB-2 nach Tabelle 4.6 gewählt. Damit zwei Schalen die gleiche geometrische Schlankheit r/t_m besitzen, muss neben r/t auch \bar{A}_{st} identisch sein.

Der spannungsbasierte Beulsicherheitsnachweis nach den ECCS-Recommendations [18] ordnet allen hier betrachteten Zylindern für den Nachweis gegen globales Beulen mit $\alpha_{glob} = 0,65$ die gleiche Imperfektionsempfindlichkeit zu. Dies ist auf den vereinfachenden Charakter des Normverfahrens zurückzuführen, welches eine Abhängigkeit des Beulabminderungsfaktor vom Aussteifungsgrad nur für $0,06 \geq \bar{A}_{st} \geq 0,2$ vorsieht. Der untergeordnete, aber vorhandene Einfluss des Flächenträgheitsmomentes der Steifen wird ebenfalls nicht erfasst.

Tabelle 4.7: Untersuchte Zylinder mit $r/t = 300$ und Lagerungsvariante RB-2

	Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	ϑ [°]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]	σ_{ki} [N/mm ²]
globales Beulen	1-a	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7	580,9
	2-a	300	300	1,0	6,0	2,0	4,0	0,57	1,72	190,7	580,5
	3-a	300	300	1,0	6,0	3,27	6,55	0,57	1,72	190,7	666,0
	4-a	300	300	1,0	4,0	3,0	4,0	0,57	0,76	190,7	614,1
lokales Beulen	5-a	150	150	0,5	3,0	7,5	30,0	0,57	1,72	190,7	384,8
	6-a	300	300	1,0	6,0	15,0	30,0	0,57	1,72	190,7	384,8
	7-a	300	300	1,0	9,0	15,0	30,0	0,86	5,80	161,3	395,9
	8-a	300	300	1,0	6,0	6,0	12,0	0,57	1,72	190,7	508,2

Aufgrund einer unterschiedlich starken Beteiligung der Steifen am Beulprozess, kann eine veränderte Anordnung der Steifen bei gleichbleibenden Aussteifungsgraden sowie Geometrie- und Materialparametern der Schale dazu führen, dass die Imperfektionsempfindlichkeit beeinflusst ist. Demnach tritt eine Änderung der Störenergie für diese Fälle infolge des Stabilitätsverhaltens der betrachteten Schalen auf und muss nicht durch die Normierungsvorschrift ausgeglichen werden.

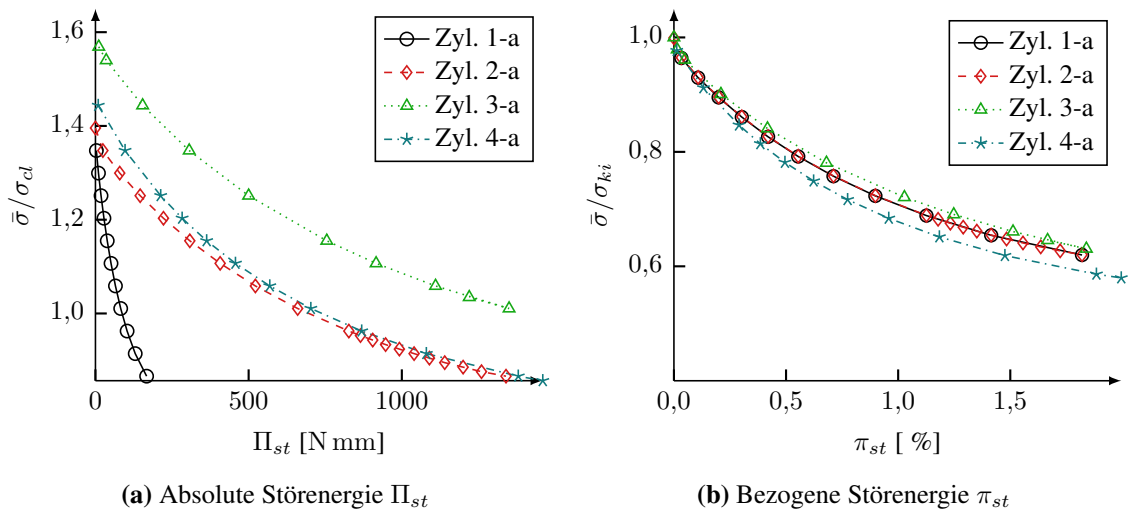


Abbildung 4.11: Normierung der Störenergie auf Grundlage von t_m für globales Beulen

Abbildung 4.11 zeigt die Kurvenverläufe der absoluten und bezogenen Störenergie für globales Beulen. Repräsentative Beul- und Störformen sind mit Zylinder 2-a in Abbildung 4.12 und 4.13 dargestellt. Die Normierung ist auf Grundlage von Gleichung 4.15 unter Verwendung der verschmierten Wandstärke t_m durchgeführt. Als Bezugswert für die Belastung ist die klassische Beullast des unversteiften Zylinders σ_{cl} bzw. die Beullast des ausgesteiften Zylinders im Verzweigungspunkt σ_{ki} gewählt.

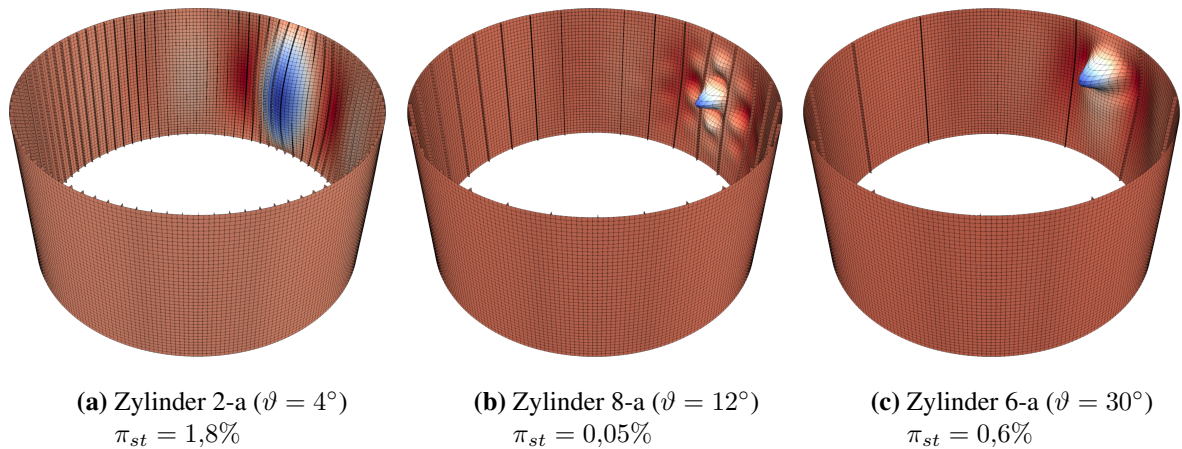


Abbildung 4.12: Störformen für variierende Segmentwinkel ϑ

Der Vergleich von Zylinder 1-a und 3-a zeigt, dass bei einer veränderten Steifenanzahl auch für identische Aussteifungskennzahlen \bar{A}_{st} und \bar{I}_{st} Unterschiede in den Grenzlasten auftreten. Dennoch gewährleistet die Normierung der Störenergie auf Grundlage der verschmierten Wandstärke die Vergleichbarkeit der Beulfälle und ermöglicht es damit, ein auf unterschiedliche Schlankheiten übertragbares Beulkriterium zu definieren. Die Abweichungen im Kurvenverlauf für Zylinder 4-a weisen nicht auf eine ungeeignete Normierungsvorschrift hin, da die Imperfektionsempfindlichkeit auch durch \bar{I}_{st} beeinflusst ist, s. Kapitel 4.4.1. Darüber hinaus macht die erhöhte Beullast gegenüber Zylinder 1-a

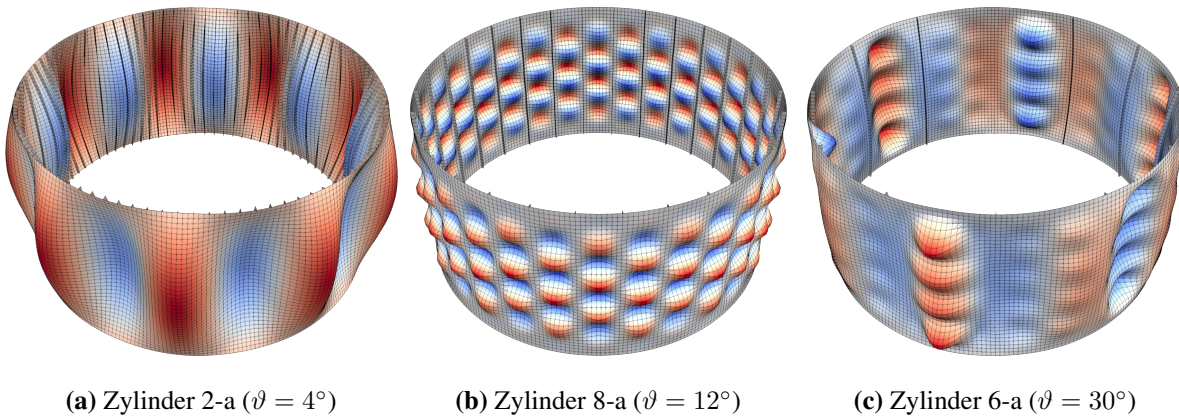


Abbildung 4.13: Beulformen für variierende Segmentwinkel ϑ

und 2-a bei gleichzeitig geringerem \bar{I}_{st} deutlich, dass sich veränderte Steifenabmessungen auch dann negativ auf das Tragverhalten auswirken können, wenn der Aussteifungsgrad zunimmt. Der globale Charakter der Beul- und Störform wird am Beispiel von Zylinder 2-a deutlich.

Ist der Steifenabstand ausreichend groß, wird lokales Beulen der Mantelfläche zwischen den Steifen maßgebend. Für Zylinder 6-a treten Überlagerungen lokaler und globaler Beulformen auf, wenngleich die lokalen Anteile dominieren. Die Störform ist im Wesentlichen von der bei nicht aussteiften Zylinderschalen auftretenden Einzelbeule innerhalb eines Mantelflächensegmentes geprägt. Eine nähere Betrachtung der Interaktion von globalen und lokalen Beulmoden erfolgt in Kapitel 4.4.4.

Während die Beullasten für die Zylinder 5-a, 6-a und 7-a mit $\sigma_{ki}/\sigma_{cl} \approx 0,91$ nur geringfügig oberhalb der Beullast eines nicht versteiften Zylinders mit gleicher Schlankheit liegen ($\sigma_{ki}/\sigma_{cl} \approx 0,83$), führt die lokale Beulform von Zylinder 8-a aufgrund des kleineren Steifenabstandes zu einer deutlich erhöhten Beullast und die Identifikation kritischer Störungen gelingt nur für einen kleinen Bereich unterhalb des Verzweigungspunktes, s. Abbildung 4.14. Dies deutet darauf hin, dass sich nach lokalem Beulen der Mantelfläche überkritisches Tragverhalten einstellt und das System einen stabilen Gleichgewichtszustand einnimmt, s. auch Kapitel 4.4.4.

Mit dem Ziel den lokalen Charakter der Störung zu berücksichtigen, erfolgt die Normierung der Störenergie für diese Fälle auf Grundlage der Wandstärke t . Daraus folgen entsprechend identische Verläufe der bezogenen Störenergien für die Zylinder 5-a und 6-a, s. Abbildung 4.14. Dass die Imperfektionsempfindlichkeit auch bei überwiegend lokalem Beulen durch die Steifen beeinflusst sein kann, wird durch einen Vergleich mit Zylinder 7-a deutlich. Infolge des erhöhten Aussteifungsgrades ist auch bei gleichem Segmentwinkel eine größere Störenergie in das System einzubringen. Die zugehörige Störform zeigt die charakteristische Einzelbeule, wobei die Amplitude nicht in der Mitte eines Zylinderssegmentes, sondern neben einer der angrenzenden Steifen lokalisiert ist.

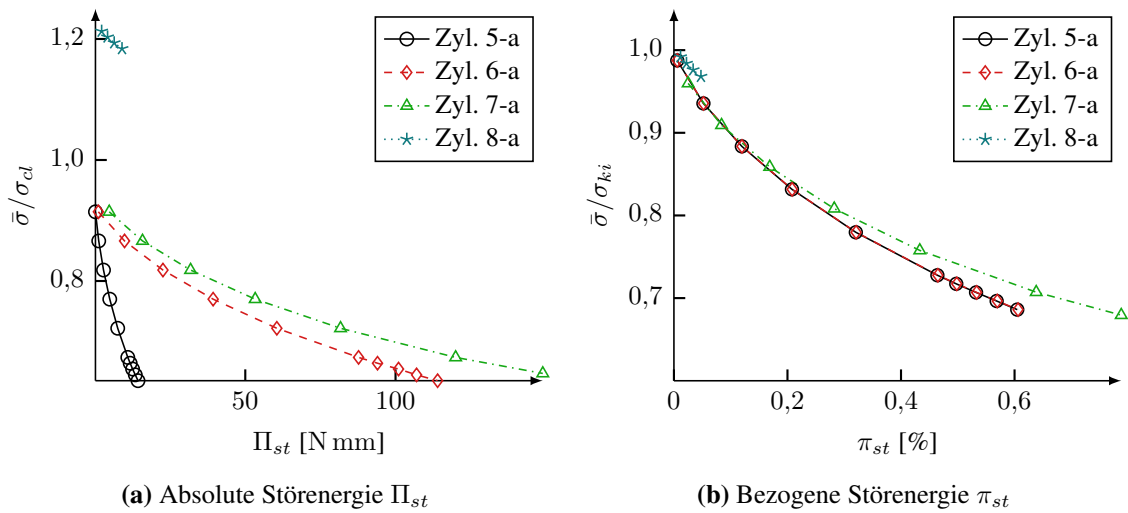


Abbildung 4.14: Normierung der Störenergie auf Grundlage der Wandstärke t für lokales Beulen

Zylinder 8-a weist ebenfalls eine lokale Störung auf, wobei infolge des verringerten Steifenabstandes verglichen mit Zylinder 5-a und 6-a eine kürzere Wellenlänge erzwungen wird, s. Abbildung 4.13. Somit ist, trotz gleicher Schlankheiten und Aussteifungskennzahlen, eine reduzierte Imperfektionsempfindlichkeit zu erwarten. Die erhöhte bezogene Störenergie ist damit plausibel und nicht durch eine ungeeignete Normierung begründet.

Aufgrund des komplexen Tragverhaltens ausgesteifter Schalen muss ein Beulkriterium die Versagensform berücksichtigen und ist nicht uneingeschränkt auf unterschiedliche Schalentragwerke übertragbar. Die Untersuchungen zeigen jedoch, dass die vorgestellte Normierung geeignet ist, die Zunahme der absoluten Störenergie bei gleichbleibender Imperfektionsempfindlichkeit infolge einer Skalierung der Schalenabmessungen zu erfassen. Ein an experimentellen Ergebnissen kalibriertes Beulkriterium ist damit für unterschiedliche Schlankheiten r/t_m bzw. r/t anwendbar, sofern qualitativ ähnliche globale bzw. lokale Beul- und Störformen vorliegen. Für die relative Bewertung der Imperfektionsempfindlichkeit im Sinne des Störenergiekonzeptes gilt:

Unterschiedliche axial gestauchte Zylinderschalen besitzen die gleiche Imperfektionsempfindlichkeit für ein definiertes Grundlastniveau $\bar{\sigma}/\sigma_{ki}$, wenn die zugehörigen bezogenen Störenergien π_{st} identisch sind und ähnliche Versagensformen auftreten.

4.4 Längsversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung

Nachfolgend ist der Einfluss von Längssteifen auf das Stabilitätsverhalten axial gestauchter Zylinderschalen untersucht. Neben einer Betrachtung unterschiedlicher geometrischer Einflussfaktoren anhand ausgewählter Beispieltragwerke erfolgt ein Vergleich numerischer Berechnungsergebnisse mit den Angaben des in Kapitel 4.1 erläuterten Nachweisverfahrens der ECCS-Recommendations [18].

4.4.1 Einfluss des Aussteifungsgrades

Das globale Beulverhalten längsversteifter Zylinder ist durch die Geometrieparameter der Steifen und der Mantelfläche maßgeblich beeinflusst und kann näherungsweise über den Aussteifungsgrad $\bar{A}_{st} = A_{st}/(b_{st}t)$ beschrieben werden [59]. Dies rechtfertigt die Verwendung der Theorie verschmierter Steifen zur Berechnung der idealen Beullast im Rahmen des Nachweisverfahrens der ECCS-Recommendations [18]. Die an diskreten Stellen vergleichsweise große Steifigkeit des Tragwerkes gegenüber radialen Verformungen wird damit jedoch nur indirekt berücksichtigt.

Nachfolgend sind variierende Steifenabmessungen mit den in Tabelle 4.8 aufgeführten Tragwerken untersucht. Die Querschnittswerte von Zylinder 6-b und 7-b sind derart gewählt, dass, verglichen mit Zylinder 2-b, \bar{A}_{st} oder \bar{I}_{st} um einen konstanten Faktor erhöht ist, während der jeweils andere Wert konstant bleibt. Als Grenzfall einer abnehmenden Steifenhöhe bei konstantem \bar{A}_{st} ist zusätzlich ein nicht ausgesteifter Zylinder mit einer äquivalenten Schlankheit von $r/t = 190,7$ betrachtet. Die Verdrehungen des Fußpunktes sind zu Null vorgegeben, um die Einspannwirkung durch die Steifen bei Lagerungsvariante RB-1 nach Tabelle 4.6 abzubilden. Es ist zu beachten, dass als Bezugsgröße für den nicht ausgesteiften Zylinder die ideale Beullast σ_{cl} für eine Schlankheit von $r/t = 150/0,5 = 300$ gewählt ist.

Tabelle 4.8: Untersuchte Zylinder mit $r/t = 300$ und RB-1

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	ϑ [°]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]	σ_{ki}/σ_{cl} [-]
1-b	150	150	0,5	2,0	1,0	4,0	0,38	0,51	217,1	1,44
2-b	150	150	0,5	2,0	1,5	4,0	0,57	0,76	190,7	1,76
3-b	150	150	0,5	2,0	2,0	4,0	0,76	1,02	170,1	2,21
4-b	150	150	0,5	3,0	2,0	4,0	1,15	3,44	139,8	3,13
5-b	150	150	0,5	3,75	2,0	4,0	1,43	6,71	123,3	3,94
6-b	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7	1,84
7-b	150	150	0,5	1,33	5,06	4,0	1,29	0,76	131,1	3,46
8-b	150	150	0,5	1,5	2,0	4,0	0,57	0,43	190,7	1,89
9-b	150	150	0,5	4,0	0,75	4,0	0,57	3,06	190,7	2,17
10-b	150	150	0,5	6,0	0,5	4,0	0,57	6,88	190,7	2,44

Die in Abbildung 4.15 dargestellte Entwicklung der idealen Beullasten bestätigt, dass diese mit steigendem \bar{A}_{st} zunehmen. Dabei ist für die untersuchten Zylinderabmessungen nur ein geringfügiger Einfluss von \bar{I}_{st} gegeben, sodass die Beullasten der Zylinder 6-b und 7-b näherungsweise durch den Kurvenverlauf beschrieben sind. Der nicht ausgesteifte Zylinder bildet den Fall der minimal möglichen Steifenhöhe ab und besitzt eine deutlich geringere Beullast als Zylinder 2-b und 6-b bei identischem Aussteifungsgrad \bar{A}_{st} . Bei Vernachlässigung der an diskreten Stellen erhöhten Biegesteifigkeit wird damit, globales Beulversagen vorausgesetzt, die Beullast auf der sicheren Seite liegend abgeschätzt. Eine steigende Steifenhöhe bei konstanter Querschnittsfläche hat jedoch nicht grundsätz-

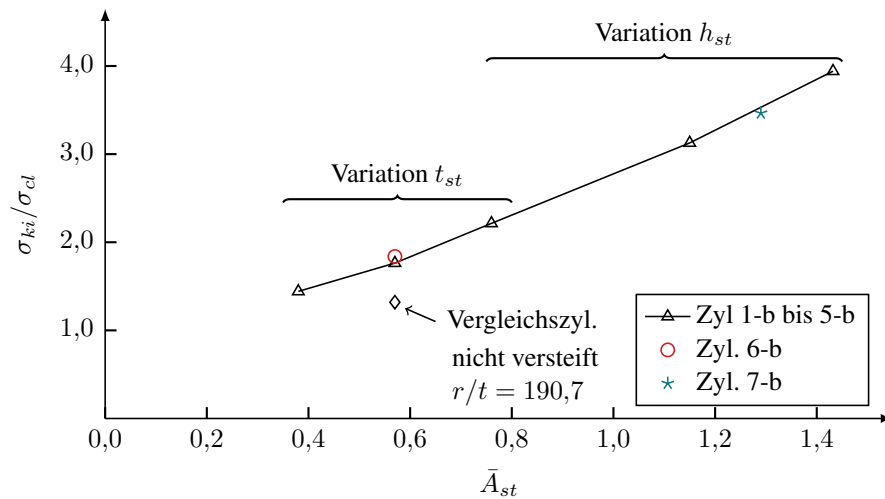


Abbildung 4.15: Entwicklung der Beullast in Abhängigkeit des Aussteifungsgrades \bar{A}_{st}

lich einen positiven Einfluss auf die Beullast des ausgesteiften Zylinders, da ein seitliches Ausweichen schlanker Steifen das Versagen der Gesamtstruktur initialisieren kann. Infolge der Interaktion des nichtlinearen Tragverhaltens von Steifen und Schale ist auch dann eine Abnahme der Beullast möglich, wenn die Beulform durch lokale Verformungen der Mantelfläche geprägt ist, s. Kapitel 4.3.

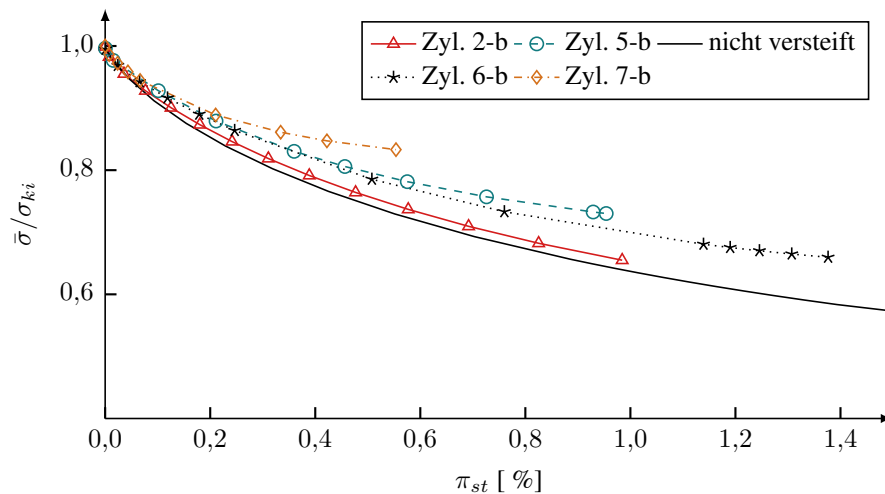


Abbildung 4.16: Einfluss der Aussteifung auf die Imperfektionsempfindlichkeit

Die Imperfektionsempfindlichkeit ist für ausgewählte Zylinder mit der Störeregie in Abbildung 4.16 dargestellt. Ein direkter Vergleich von Zylinder 2-b, 6-b und 7-b zeigt, dass die ermittelte Störeregie zwar stärker von \bar{A}_{st} als von \bar{I}_{st} abhängig ist, aber auch mit steigendem \bar{I}_{st} bei konstantem \bar{A}_{st} erkennbar zunimmt. Dies wird durch das Normverfahren nicht berücksichtigt. Aufgrund der geringen Steifenhöhe von Zylinder 2-b weist dieser eine ähnliche Imperfektionsempfindlichkeit wie die nicht versteifte Schale auf, während die Kurve für Zylinder 6-b flacher verläuft. Ein destabilisierender Einfluss infolge einer Vergrößerung der Steifenhöhe ist durch den Vergleich der Zylinder 5-b und 7-b zu erken-

nen. Trotz der größeren Aussteifung von Zylinder 5-b und der daraus folgenden erhöhten Beullast, sind die bezogenen Störenergien geringer.

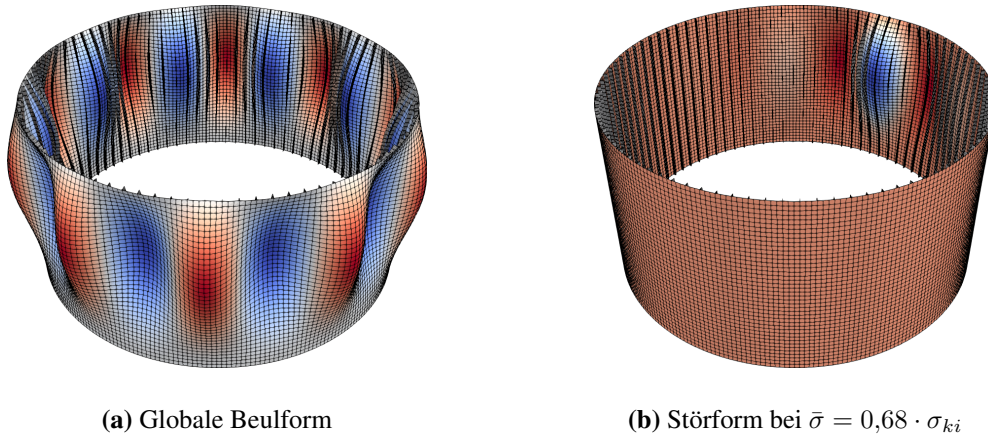


Abbildung 4.17: Verformungsfiguren kritischer Zustände für Zylinder 6-b mit $r/t_m = 190,7$

Die in Abbildung 4.17 exemplarisch für Zylinder 6-b gezeigte Beul- und Störform macht die globale Charakteristik des Stabilitätsversagens deutlich. Gleiches gilt für alle weiteren, hier nicht explizit dargestellten, Zylinder. Aufgrund der Aussteifung erstrecken sich die Beulwellen über einen Großteil der Zylinderlänge. Die für die nicht ausgesteifte Schale in Abbildung 4.18 erkennbare Konzentration der Verschiebungsamplituden am wölbfrei gelagerten Rand deutet sich dennoch auch für den ausgesteiften Zylinder an. Gleiches gilt für die örtlich begrenzte Einzelbeule der jeweiligen Störform.

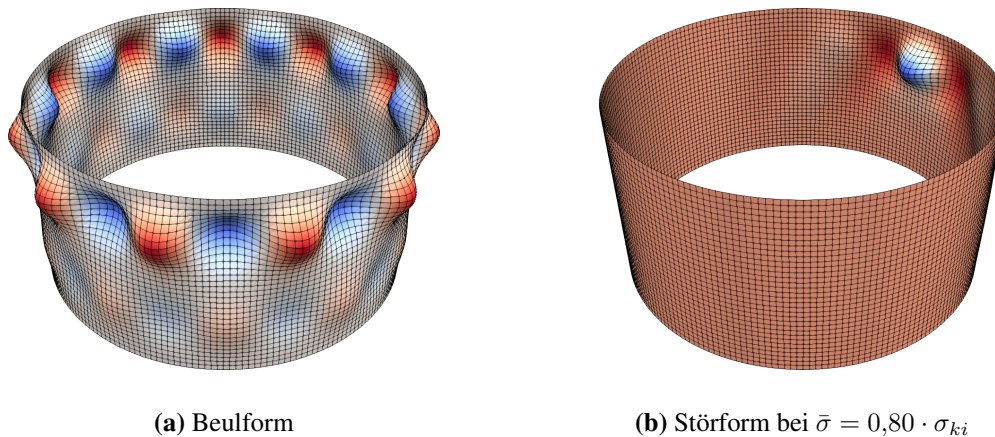


Abbildung 4.18: Verformungsfiguren kritischer Zustände des nicht versteiften Zylinders mit $r/t = 190,7$

Die elementweise Berechnung der Störenergie ermöglicht eine Aufteilung in Mantelflächen- und Steifenanteile, s. Abbildung 4.19. Es wird deutlich, dass die den Steifen zugeordneten Anteile positiv sind und mit steigender Steifendicke zunehmen. Gleichzeitig sinken die bei $t_{st} = 1$ mm noch größtenteils positiven Anteile der Mantelfläche und gehen in den negativen Bereich über. Aufgrund der betragsmäßig größeren Steifenanteile nimmt die Gesamtenergie mit dem Aussteifungsgrad jedoch zu.

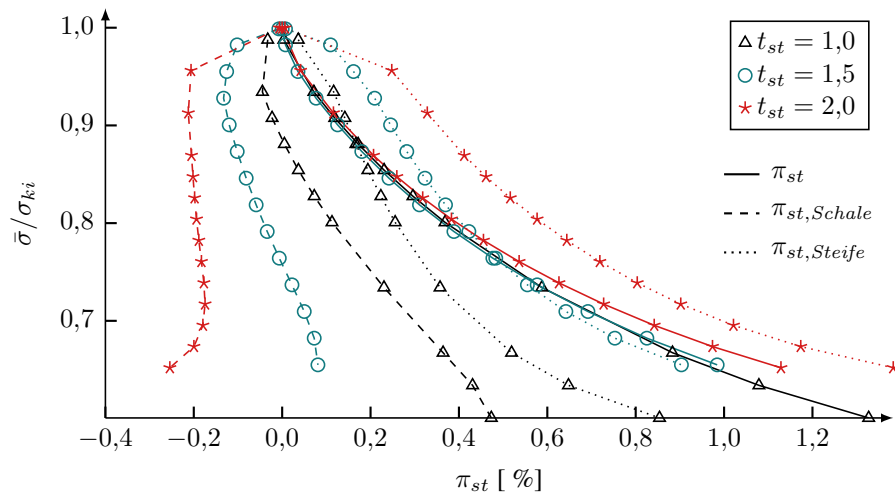


Abbildung 4.19: Aufteilung der Störenergie in Mantelflächen- und Steifenanteile

4.4.2 Einfluss der Randbedingungen

Bei einer Modellierung längsversteifter Zylinder im Rahmen der FEM ist die Lagerung der Steifen explizit vorzugeben. Daraus ergibt sich in Kombination mit den klassischen Randbedingungen für die Mantelfläche (s. Tabelle 4.5) eine Vielzahl unterschiedlicher Beulfälle. TRANEL [72] zeigt am Beispiel nicht versteifter Zylinder, dass ein wesentlicher Einfluss der Wegrandbedingungen auf das Stabilitätsverhalten auch dann vorliegen kann, wenn die Last-Verformungs-Charakteristik im Vorbeulbereich durch die Randbedingungen nicht beeinflusst ist.

Mit den Lagerungsvarianten RB-1 und RB-2, bei welchen für Steifen und Mantelfläche identische Randbedingungen vorgegeben sind (s. Abbildung 4.1), ist nachfolgend der Einfluss der Querschnittsverwölbung untersucht. Da das nichtlineare Tragverhalten der Steifen das Stabilitätsverhalten der Gesamtstruktur beeinflusst, sind zusätzlich die Fälle einer gleichmäßigen Belastung der gesamten Querschnittsfläche sowie eines Lasteintrages über die Mantelfläche unterschieden.

Tabelle 4.9: Untersuchte Zylinder mit $r/t = 300$

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	ϑ [°]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]
1-c	300	300	1,0	6,0	2,0	4,0	0,57	1,72	190,7
2-c	150	150	0,5	3,0	1,0	4,0	0,57	1,72	190,7

Abbildung 4.20 zeigt die entsprechenden Störenergieverläufe für Zylinder 1-c nach Tabelle 4.9. Durch die nicht wölbfreie Lagerung eines Zylinderrandes (RB-1) ist ein signifikanter Anstieg der Beullast gegenüber der beidseitig wölbfrei gelagerten Schale (RB-2) zu erkennen. Bei ausschließlicher Belastung der Mantelfläche nimmt die Beullast für RB-2 zu, während die Steigung des Störenergieverlaufes nicht beeinflusst ist. Die Beulformen

weisen $n = 9$ (belastet) bzw. $n = 10$ (unbelastet) Halbwellen in Umfangsrichtung auf. Für RB-1 ist kein wesentlicher Einfluss des Lasteintrages auf die Beullast vorhanden, wenngleich die Störenergie ohne direkte Belastung mit abnehmender Last geringfügig stärker anwächst. Für beide Beulformen gilt $n = 11$.

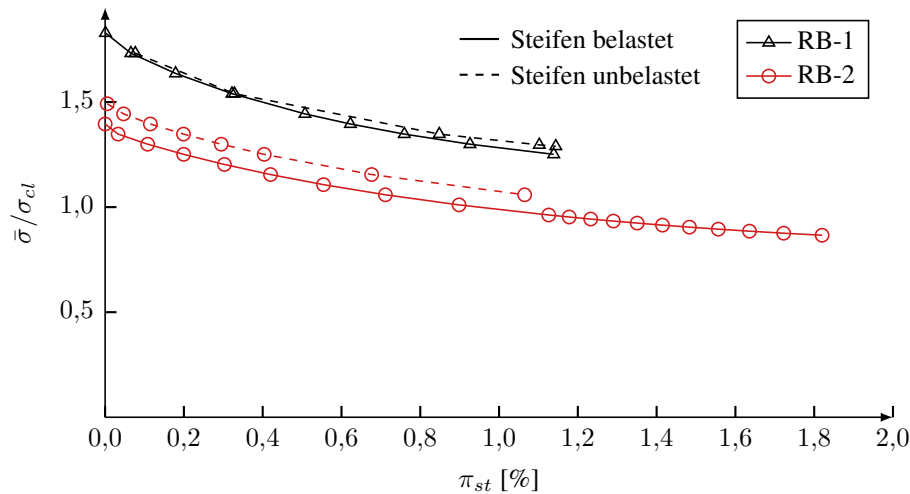


Abbildung 4.20: Störenergie in Abhängigkeit des Lasteintrages für Zylinder 1-c bei nicht wölbfreier (RB-1) und wölbfreier (RB-2) Lagerung

Werden alle Verschiebungen der Steifen und der Mantelfläche an einem Rand gehalten resultiert aus der Scheibentragwirkung der Steifen eine Einspannwirkung am betreffenden Rand, auch wenn die Mantelfläche gelenkig gelagert ist. Um dies zu berücksichtigen, sind die Abmessungen von Zylinder 2-c derart gewählt, dass verglichen mit Zylinder 1-c gleiche Aussteifungskennzahlen und Schlankheiten jedoch unterschiedliche Steifenhöhen vorliegen. Ein Einfluss auf die Störenergie in Abbildung 4.21 ist jedoch nicht zu erkennen. Die Einspannwirkung infolge der am Fußpunkt gehaltenen, unterschiedlich hohen Steifen ist somit von untergeordneter Bedeutung. Des Weiteren wird durch die Normierung der Last auf die Beullast σ_{ki} deutlich, dass die Imperfektionsempfindlichkeit durch die nicht wölbfreie Lagerung geringfügig zunimmt.

Exemplarische Störformen sind für beide Lagerungsvarianten und bei gleichmäßigem Lasteintrag in Abbildung 4.22 dargestellt. Für eine wölbfreie Lagerung befindet sich die Amplitude der Einzelbeule mittig zwischen den Schalenrändern. Werden hingegen alle Verschiebungen der Steifen und der Mantelfläche an einem Rand gehalten, verschiebt sich die Amplitude in Richtung des wölbfreien Randes.

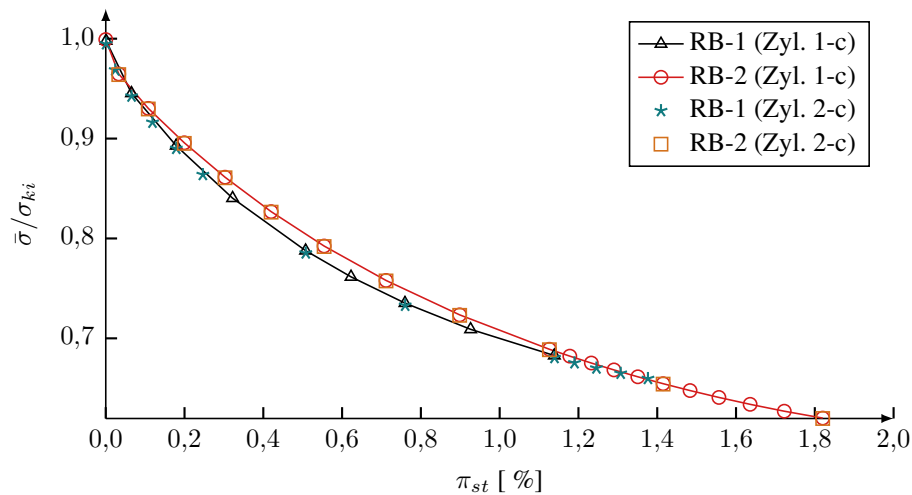
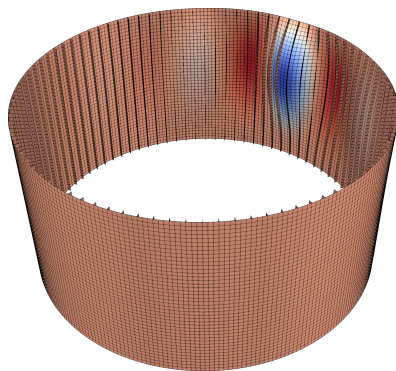
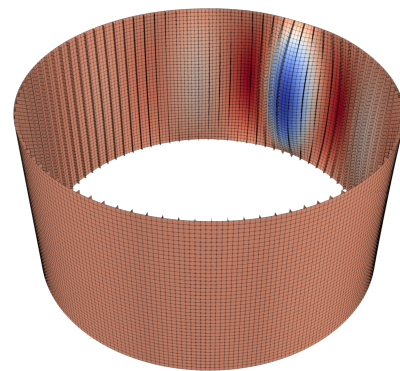


Abbildung 4.21: Störenergie für nicht wölbfreie (RB-1) und wölbfrei (RB-2) Lagerung bei gleichmäßiger Belastung der Steifen und Mantelfläche

Die Theorie verschmierter Steifen, welche für beidseitig gelenkig und wölbfrei gelagerte Ränder entwickelt ist, wird im Nachweisformat der ECCS-Recommendations [18] auch für Schalen mit eingespannten sowie nicht wölbfreien Rändern verwendet. Diese Annahme liegt auf der sicheren Seite und ist für die hier betrachteten Fälle gerechtfertigt. Aufgrund der damit unterschätzten tatsächlichen Beullast, führt auch die Vernachlässigung der erhöhten Imperfektionsempfindlichkeit nicht zu einer unsicheren Abschätzung der kritischen Last. Dennoch zeigen die Ergebnisse, dass bei einer Berechnung der Beullast mit Hilfe numerischer Verfahren eine genauere Betrachtung der Imperfektionsempfindlichkeit vorteilhaft sein kann.



(a) Nicht wölbfreie Lagerung RB-1



(b) Wölbfreie Lagerung RB-2

Abbildung 4.22: Störformen für Zylinder 1-c bei gleichmäßiger Belastung der Steifen und Mantelfläche

4.4.3 Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis

Der spannungsbasierte Beulsicherheitsnachweis der ECCS-Recommendations [18] sieht für die Berücksichtigung des imperfekten Tragverhaltens von global elastisch beulenden

Schalen die Abminderung der ideal elastischen Beullast $n_{x,Rcr}$ über den elastischen Beulabminderungsfaktor α_{glob} vor. Wie in Kapitel 4.1 erläutert, ist $n_{x,Rcr}$ im Allgemeinen nicht unabhängig von der Fließspannung. Um die Unabhängigkeit für die nachfolgenden Untersuchungen zu gewährleisten, wird die als Grenzwert vorgesehene effektive Breite nach Gleichung 4.9 nicht angesetzt. Damit entspricht $n_{x,Rcr}$ der von BLOCK et al. in [7] angegebenen Beullast, welche nachfolgend mit p_{cl}^* bezeichnet ist. Wenngleich das Normverfahren nicht zwischen gelenkiger und eingespannter Randlagerung unterscheidet, ist bei der Modellierung Variante RB-2 verwendet, da diese der Theorie verschmierter Steifen zugrunde gelegt ist. Es sind die Schlankheiten $r/t = 300$ und $r/t = 400$ betrachtet, wobei die Abmessungen der Steifen derart gewählt sind, dass die Aussteifungskennzahl \bar{I}_{st} bei variierender verschmierter Schlankheit r/t_m unverändert ist, s. Tabelle 4.10.

Tabelle 4.10: Untersuchte Zylinder mit RB-2 und $\vartheta = 4^\circ$ ($n_{st} = 90$)

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]	p_{ki} [N/mm]	p_{ki}/p_{cl}^* [-]
1-d	300	300	1,0	2,31	15,0	1,65	0,74	113,0	3848,6	-
2-d	300	300	1,0	2,43	12,94	1,50	0,74	119,9	3592,5	-
3-d	300	300	1,0	3,14	6,0	0,90	0,74	158,0	1268,1	3,41
4-d	300	300	1,0	4,01	2,87	0,55	0,74	193,7	917,1	1,81
5-d	300	300	1,0	5,70	1,0	0,27	0,74	235,8	615,7	1,39
6-d	300	300	1,0	7,18	0,5	0,17	0,74	256,1	563,1	1,28
7-d	300	300	1,0	9,40	0,22	0,10	0,74	272,7	114,8	-
8-d	400	400	1,0	3,55	5,5	1,10	0,74	190,5	2033,1	3,99
9-d	400	400	1,0	2,83	10,84	0,70	0,74	235,4	1126,2	2,67
10-d	400	400	1,0	4,43	2,84	0,45	0,74	275,9	596,3	1,64
11-d	400	400	1,0	6,27	1,0	0,23	0,74	326,6	425,9	1,31

Für ein konstantes r/t ist der Aussteifungsgrad \bar{A}_{st} mit

$$\frac{r}{t_m} = \frac{r}{t} \cdot \left(1 + \frac{A_{st}}{b_{st}t} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

proportional zu r/t_m , sodass einer der beiden Parameter, bei bekanntem \bar{I}_{st} , zur Charakterisierung der Aussteifung ausreicht. Werden hingegen Schalen mit unterschiedlichen Schlankheiten verglichen, liegen bei identischem r/t_m variierende Aussteifungsgrade vor. Ein entsprechender Einfluss ist sowohl für p_{cl}^* als auch für die numerisch ermittelten Grenzlaster in Abbildung 4.23 erkennbar. Die gestrichelten Kurventeile für p_{cl}^* grenzen im gedrunenen Bereich die Fälle ab, bei welchen der maximale Aussteifungsgrad nach ECCS-Recommendations [18] überschritten ist. Ein weiterer Grenzwert folgt aus den Mindestabmessungen zur Vermeidung lokalen Beulversagens der Steifen. Die zugehörigen Grenzlaster sind gepunktet dargestellt und markieren eine Obergrenze für r/t_m . Die aus den Abgrenzungskriterien folgenden Anwendungsbereiche des Normverfahrens sind für die Schlankheiten $r/t = 300$ und $r/t = 400$ farblich hervorgehoben.

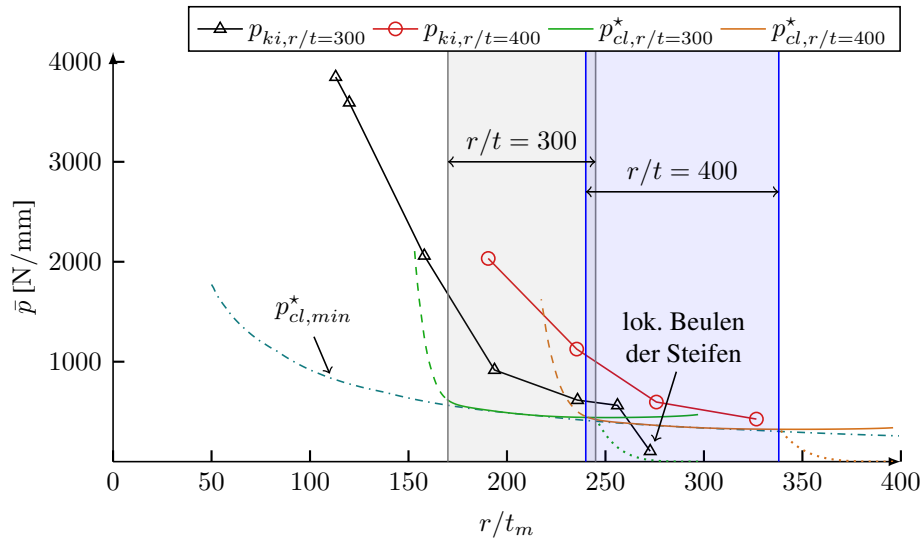


Abbildung 4.23: Vergleich numerisch ermittelter Verzweigungslasten p_{ki} mit Beullasten nach der Theorie verschmierter Steifen p_{cl}^*

Eine Auswertung der Theorie verschmierter Steifen für variierende Schlankheiten r/t_m führt auf die mit $p_{cl,min}^*$ bezeichnete Einhüllende der Beullasten. Die genannten Grenzwerte nach ECCS-Recommendations [18] sind dabei berücksichtigt. Mit abnehmendem r/t_m werden die numerisch ermittelten Beullasten, unabhängig von der betrachteten Schlankheit r/t , durch das Normverfahren zunehmend unterschätzt. Darüber hinaus ist es durch den vorgegebenen Grenzwert nicht möglich, die deutliche Zunahme der Beullast bei Überschreiten des maximalen Aussteifungsgrades im Tragwerksentwurf zu berücksichtigen. Im Bereich gedrungener Schalen tritt lokales Beulversagen ausschließlich bei Zylinder 7-d auf, wenngleich bereits die verschmierte Schlankheit für Zylinder 6-d den Grenzwert überschreitet. Das Normverfahren liegt damit auf der sicheren Seite.

Die Imperfektionsempfindlichkeit der Schalen ist durch die Grenzlaster bei nicht anfänglicher Störung in Abbildung 4.24 beschrieben. Werden die numerisch ermittelten Grenzlaster auf p_{cl}^* bezogen ist ein direkter Vergleich mit α_{glob} möglich. Da für die Zylinder 3-d und 9-d der maximale Aussteifungsgrad überschritten ist, wird für diese $p_{cl,min}^*$ als Bezugsgröße gewählt. Die Zylinder 1-d und 2-d mit $r/t = 300$ sowie Zylinder 8-d mit $r/t = 400$ sind nicht dargestellt, da sie gänzlich außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Theorie verschmierter Steifen liegen, wenn diese für die jeweilige Schlankheit ausgewertet wird.

Die Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit durch Abminderung der idealen Beullast erfordert mit steigender verschmierter Schlankheit eine zunehmende Reduktion von p_{cl}^* . Dieser qualitative Zusammenhang wird mit der Vorgabe von $\alpha_{glob} = 0,65$ nach den ECCS-Recommendations [18] nicht abgebildet, sodass im konkreten Anwendungsfall eine wirtschaftlichere Bemessung möglich ist. Eine lineare Interpolation zwischen α_{glob} und α_x ist für die hier betrachteten Fälle nicht relevant, da diese lediglich für schwach versteifte Schalen mit $\bar{A}_{st} \leq 0,2$ auszuführen ist, s. Kapitel 4.1.

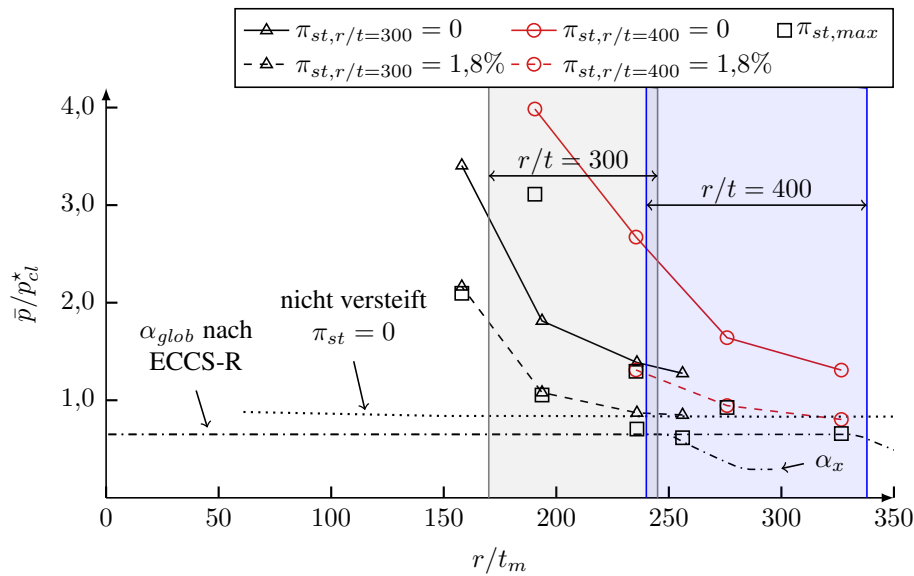


Abbildung 4.24: Vergleich numerisch ermittelter Grenzlaster mit den Angaben nach ECCS-R [18]

Aufgrund fehlender Konvergenz des nichtlinearen Eigenwertproblems gelingt es nicht für alle untersuchten Zylinder kritische Störungen für bezogene Grundlastniveaus im Bereich von α_{glob} zu ermitteln. Bei gleichzeitig flachem Kurvenverlauf der Störenergie deutet dies darauf hin, dass die Bemessungsbeullast unterhalb des dem jeweiligen Grundzustand benachbarten Nachbeulminimums und damit stark auf der sicheren Seite liegt. Die minimalen Grundlastniveaus, für welche eine Identifizierung kritischer Störungen gelingt, sind durch $\pi_{st,max}$ gekennzeichnet. Es ist somit nicht möglich ein Beulkriterium auf Grundlage der Störenergie zu formulieren, welches für den gesamten Anwendungsbereich das Sicherheitsniveau des Normverfahrens abbildet. Die Gegebenheit, dass der Beulwiderstand des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises unter Umständen numerisch nicht direkt nachvollzogen werden kann, ist in der DIN EN 1993-1-6 explizit erwähnt.

Abbildung 4.25 stellt die Störenergien für $r/t = 300$ gegenüber. Die Belastung ist auf die ideale Beullast bezogen. Im Bereich hoher Grundlastniveaus nimmt die Imperfektionsempfindlichkeit mit abnehmender Schlankheit zu, was dem gegensätzlichen Verhalten von nicht ausgesteiften Zylindern entspricht. Mit sinkendem Grundlastniveau verringert sich die Steigung von π_{st} für gedrungene Zylinder jedoch stärker und die Kurve für $r/t_m = 158,0$ überschneidet die anderen Verläufe. Der für nicht ausgesteifte Zylinder gültige Zusammenhang, dass mit der Schlankheit auch die Imperfektionsempfindlichkeit zunimmt, ist damit nicht uneingeschränkt auf ausgesteifte Zylinder übertragbar.

Trotz der gezeigten Abhängigkeit bleibt die Charakteristik der in Abbildung 4.24 dargestellten Kurven auch für verschiedene Niveaus der bezogenen Störenergie erhalten, da die numerisch ermittelten Beullasten p_{ki} durch die Theorie verschmierter Steifen mit abnehmendem r/t_m zunehmend unterschätzt werden. Je größer die verschmierte Schlankheit r/t_m ist, desto stärker muss p_{cl}^* abgemindert werden.

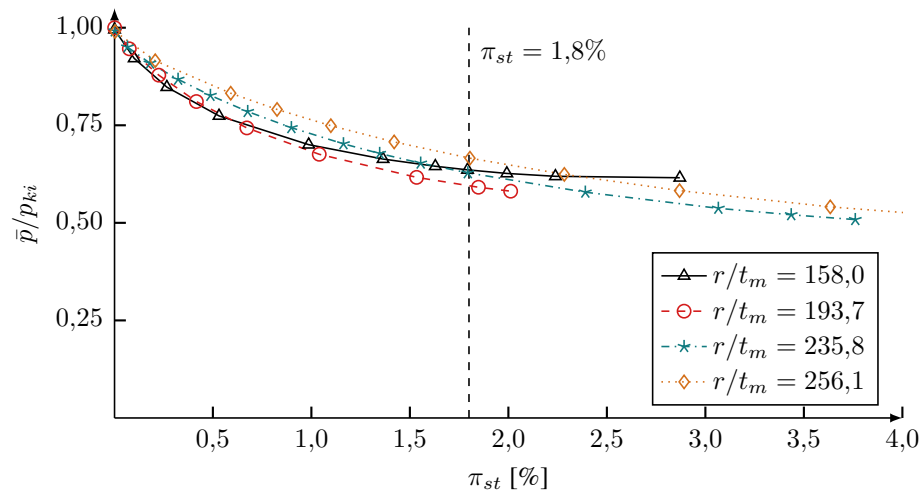


Abbildung 4.25: Störenergie für $r/t = 300$

Erfolgt eine Bemessung auf Grundlage der numerisch ermittelten Beullasten p_{ki} , sieht das Normverfahren zur Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit ebenfalls die Abminderung mittels α_{glob} vor. Eine in Abhängigkeit des gewählten Beulkriteriums gegebenenfalls erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit gedrungener Schalen ist somit nicht abgebildet. Dies wird durch die veränderlichen Neigungen der Kurvenverläufe für die Grenzlaster gegenüber dem konstanten Beulabminderungsfaktor α_{glob} in Abbildung 4.26 deutlich. Dennoch ist die näherungsweise Beschreibung der Imperfektionsempfindlichkeit durch α_{glob} bei Berücksichtigung eines entsprechend hohen Sicherheitsniveaus gerechtfertigt. Wird zugunsten eines wirtschaftlicheren Entwurfs jedoch ein erhöhter Beulabminderungsfaktor angestrebt, kann dieser mit Hilfe des Störenergiekonzeptes unter Berücksichtigung des tatsächlichen Tragverhaltens begründet werden.

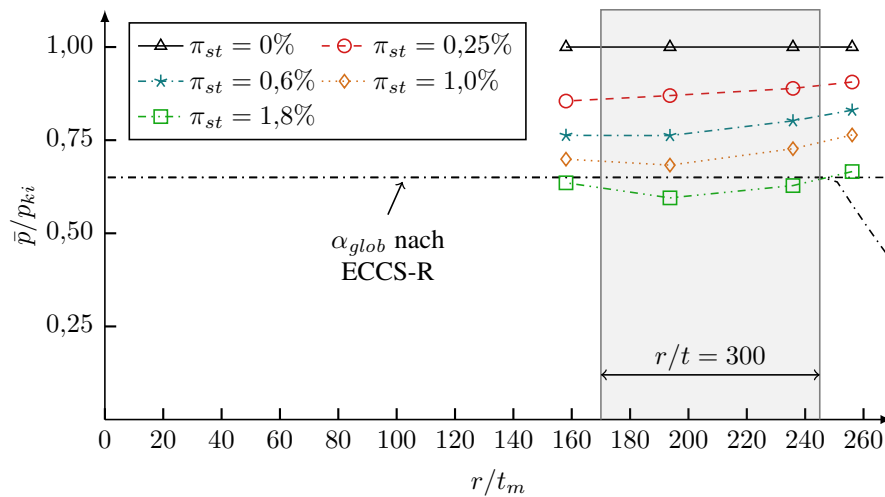


Abbildung 4.26: Grenzlaster für unterschiedliche Niveaus der bezogenen Störenergie und $r/t = 300$

4.4.4 Interaktion von Beulmoden

Aufgrund der nichtlinearen Wechselwirkung zwischen Steifen und Schale kann neben eindeutig lokalen und globalen Beulmoden auch eine Interaktion verschiedener Moden auftreten. Nachfolgend sind die Fälle einer Interaktion von lokalen Beulmoden der Mantelfläche und der Steifen sowie von lokalem Beulen der Mantelfläche mit globalem Beulen des Gesamttragwerkes betrachtet.

Interaktion lokaler Beulmoden

Ein durch zwei Längssteifen begrenztes Zylinderschalensegment kann, mit Bezug auf lokales Beulen, für die Grenzfälle kleiner bzw. großer Steifenabstände als nicht versteifte Zylinderschale bzw. als ein an den Längsrändern gehaltener Plattenstreifen betrachtet werden. Beide Fälle unterscheiden sich wesentlich in ihrer Imperfektionsempfindlichkeit, da ein instabiler Nachbeulbereich erst durch die Krümmung der Mantelfläche entsteht. Ebene Plattenstreifen können hingegen ein ausgeprägtes überkritisches Tragverhalten aufweisen. Für diese Fälle wird in experimentellen Untersuchungen an ausgesteiften Zylinderschalen nach instabilem Beulen eines Zylindersegmentes und einem kurzen Abfallen der Last-Verformungs-Kurve eine entsprechende Laststeigerung beobachtet. Die Identifikation einer kritischen Störung im Rahmen des Störenergiekonzeptes gelingt nur dann, wenn ein instabiler Nachbeulbereich vorhanden ist. Ausschließlich lokales Beulen von Längssteifen tritt bei entsprechend schlanken Querschnitten auf, wobei vereinfachend eine Betrachtung der Steifen als eingespannter Plattenstreifen möglich ist.

Tabelle 4.11: Untersuchte Zylinder mit $r/t = 150$ und RB-1

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	n_{st} [-]	ϑ [°]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	σ_{ki}/σ_{cl} [-]
1-e	600	600	4,0	30,0	4,0	12	30,0	0,10	0,45	0,94
2-e	600	600	4,0	30,0	8,0	12	30,0	0,19	0,90	0,99
3-e	600	600	4,0	30,0	16,0	12	30,0	0,38	1,79	1,02
4-e	600	600	4,0	-	-	-	-	-	-	0,84

Die Interaktion der lokalen Beulmoden ist nachfolgend für Zylinderschalen mit $n_{st} = 12$ Steifen und variierenden Steifendicken untersucht, s. Tabelle 4.11. Es ist zu beachten, dass die Steifen von Zylinder 1-e den Nachweis gegen lokales Beulen nach den ECCS-Recommendations [18] unter Annahme vollständiger Querschnittsausnutzung nicht erfüllen. Der Zylinder ist dennoch Bestandteil der Betrachtungen, um den Interaktionseffekt grundsätzlich zu beschreiben. Mit Lagerungsvariante RB-1 sind alle Verschiebungen der Mantelfläche und Steifen am Fußpunkt gehalten, sodass eine direkte Stauchung der Steifen durch einen entsprechenden Lasteintrag am oberen Rand gegeben ist.

In Abbildung 4.27 sind die ermittelten Störenergien über dem Niveau der Grundbelastung $\bar{\sigma}$ aufgetragen. Trotz des relativ großen Steifenabstandes ist ein Einfluss der Steifen

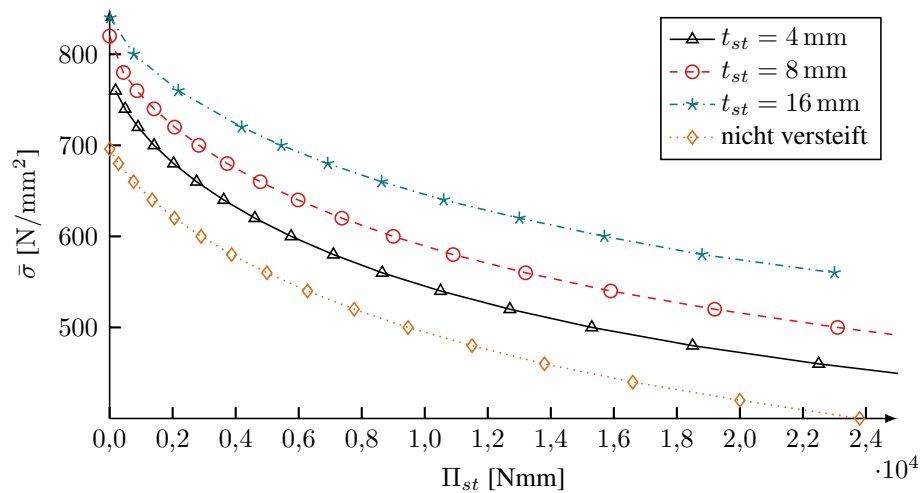


Abbildung 4.27: Absolute Grenzlasten für variierende Steifendicken

auf den Beulprozess deutlich erkennbar. Unabhängig vom Wert der Störenergie hat eine steigende Steifendicke t_{st} eine Zunahme der zugehörigen Grenzlast zur Folge.

Der Einfluss der Steifendicke auf die Imperfektionsempfindlichkeit ist in Abbildung 4.28 gezeigt. Mit der Normierung der Grundbelastung auf die ideale Beullast σ_{ki} (entspricht $\bar{\sigma}$ bei $\Pi_{st} = 0$) ist die Imperfektionsempfindlichkeit durch die Abnahme der Beullast der perfekten Schale infolge einer Störung beschrieben. Im Bereich hoher Lastniveaus ist für $t_{st} = 4$ weniger Energie notwendig, um das System in einen kritischen Zustand zu überführen, als für die nicht ausgesteifte Schale. Wenngleich nur eine geringfügige Differenz zu erkennen ist, wird deutlich, dass mit einer durch die Aussteifung zunehmenden Beullast gleichzeitig eine erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit auftreten kann.

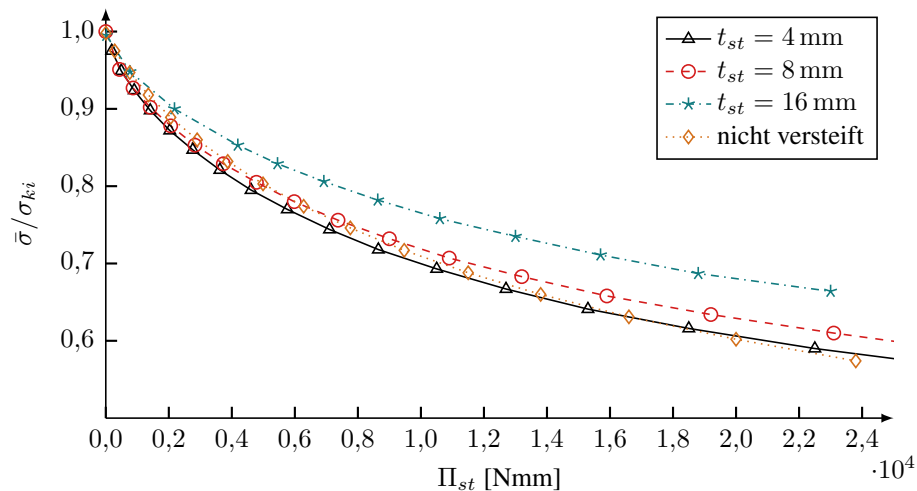


Abbildung 4.28: Bezogene Grenzlasten für variierende Steifendicken

Abbildung 4.29 stellt die Störenergie aufgeteilt in die Membran- und Biegeanteile sowie Schalen- und Steifenanteile für $t_{st} = 4$ mm der nicht ausgesteiften Schale gegenüber. Während im Bereich hoher Lasten die Abnahme der Störenergie aus verringerten Biege-

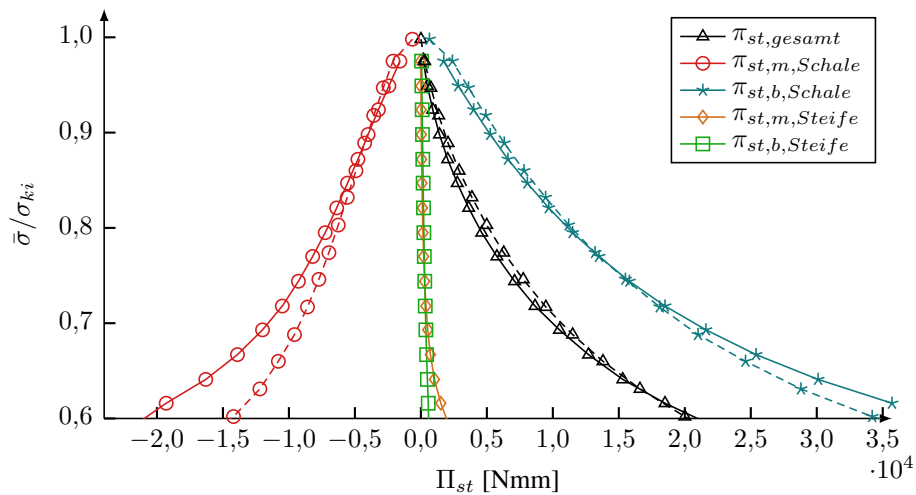


Abbildung 4.29: Energieverteilung für $t_{st} = 4 \text{ mm}$ und die nicht ausgesteifte Schale (gestrichelt)

energieanteile resultiert, ist bei sinkender Last der zunehmend negative Membranenergieanteil der Schale ausschlaggebend. Die Störenergie der Steifen ist für alle betrachteten Grundzustände von positiver Membranenergie dominiert und trägt dazu bei, dass die Gesamtstörenenergie der ausgesteiften Schale für $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} < 0,62$ größer als für den nicht aussteiften Fall ist. Ab einer Belastung von $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} > 0,75$ entfällt nur ein geringfügiger Anteil der Gesamtstörenenergie auf die Steifen, welcher für alle betrachteten Grundzustände positiv ist. Die erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit infolge einer Aussteifung der Schale ist damit nicht direkt durch die Energieanteile der Steifen, sondern in deren Einfluss auf die Schalenmantelfläche begründet.

Die Beulformen der ausgesteiften Zylinder machen deutlich, dass die seitlichen Verformungen der Steifen bei Erreichen des Verzweigungspunktes mit zunehmender Steifendicke deutlich geringer ausfallen, s. Abbildung 4.30. Sind die Steifen ausreichend dünn, folgt aus einer vergleichsweise kleinen Störung ein seitliches Knicken und in der Folge eine destabilisierende Biegewirkung auf die Schalenmantelfläche.

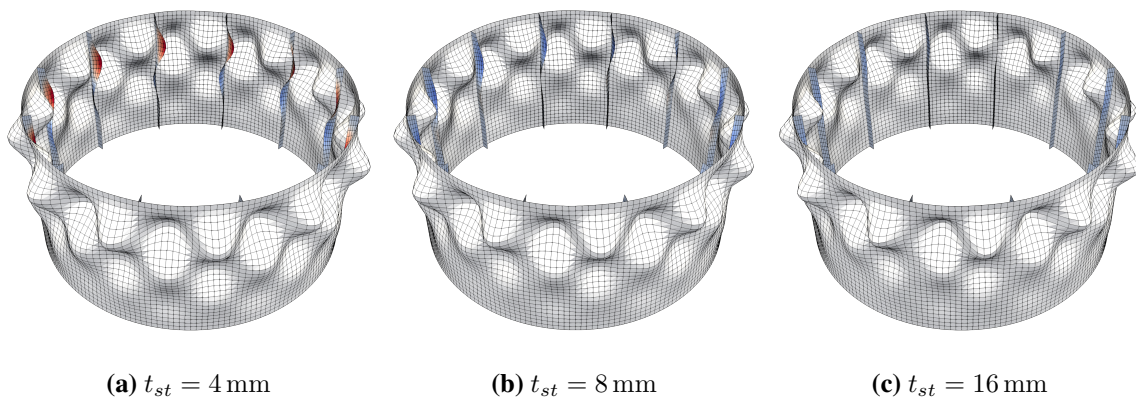


Abbildung 4.30: Beulformen im Verzweigungspunkt

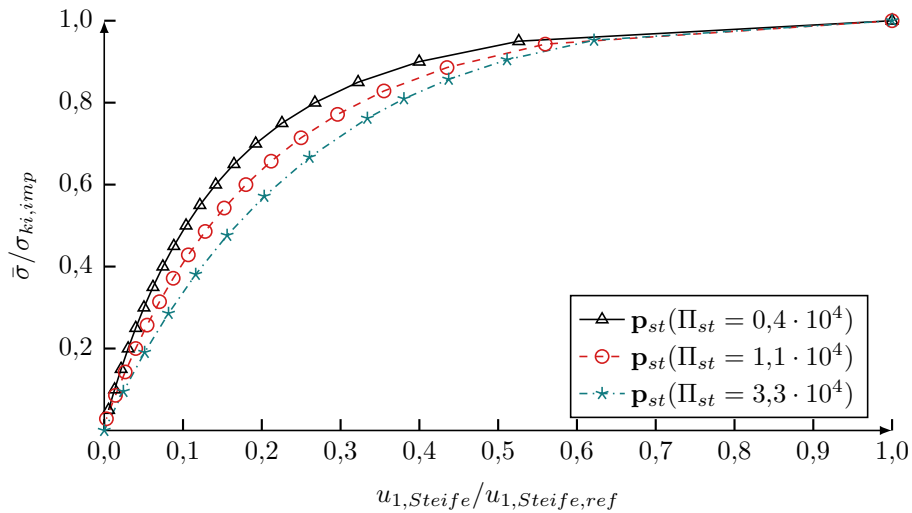
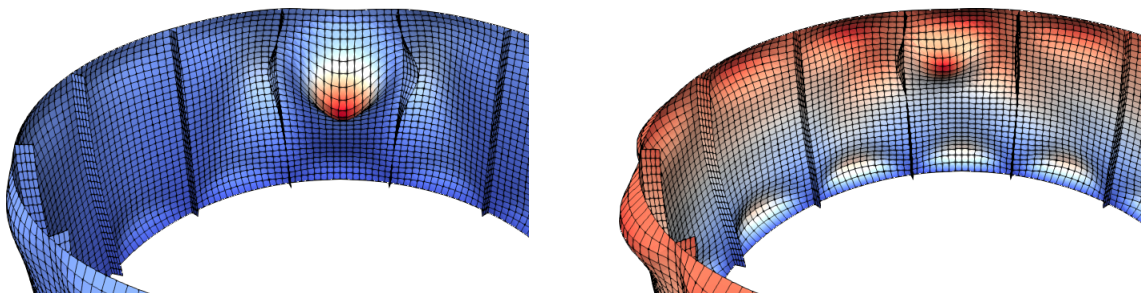


Abbildung 4.31: Maximale Verschiebung der Steifen in Ringrichtung bei Aufbringen von \mathbf{p}_{st} als anfängliche Störbelastung für $t = 4 \text{ mm}$

Dies wird durch eine Betrachtung als Spannungsproblem für unterschiedliche Störungen mit Abbildung 4.31 bestätigt. Dargestellt sind die maximalen seitlichen Verschiebungen der Steifen bei kontinuierlicher Laststeigerung unter Berücksichtigung der für unterschiedliche Lastniveaus ermittelten Störlasten als anfängliche Imperfektionen. Als Referenzwert ist die Verschiebung bei Erreichen des jeweiligen kritischen Zustandes gewählt. Für den Grundzustand mit dem höchsten Lastniveau bzw. der kleinsten Störenergie ist das nichtlineare Tragverhalten am stärksten ausgeprägt und gleichzeitig die Differenz zur Störenergie der nicht aussteiften Schale maximal.

Die Verformungen der Schale für die mit $\Pi_{st} = 0,4 \cdot 10^4 \text{ N mm}$ und $\Pi_{st} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ N mm}$ beschriebenen kritischen Zustände sind in Abbildung 4.32 dargestellt. Die Färbung kennzeichnet die Norm des Verschiebungsvektors des jeweiligen Knotens. Für die geringere Störenergie stellt sich eine entsprechend kleinere Amplitude der Einzelbeule ein, während das seitlich Ausweichen der Steife auch hier deutlich zu erkennen ist.



(a) $\Pi_{st} = 0,4 \cdot 10^4 \text{ N mm}$

(b) $\Pi_{st} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ N mm}$

Abbildung 4.32: Verformung im kritischen Zustand (40-fach überhöht) für $t_{st} = 4 \text{ mm}$

Da das Stabilitätsverhalten der Steifen durch die Randbedingungen beeinflusst ist, wirken sich diese auch auf die Imperfektionsempfindlichkeit der gesamten Struktur aus. Sind die

Steifen in Meridianrichtung nicht gehalten und nicht belastet (RB-2*), tritt das signifikant nichtlineare Tragverhalten bedingt durch den indirekten Lasteintrag über die Mantelfläche erst bei größeren Lasten auf. Der in Abbildung 4.33 dargestellte Verlauf der Störenergie bestätigt die geringere Imperfektionsempfindlichkeit. Verglichen mit Lagerungsvariante RB-1 nach Tabelle 4.6 ist der nachteilige Einfluss der Steifen geringer ausgeprägt und erst ab $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} \approx 0,75$ erkennbar.

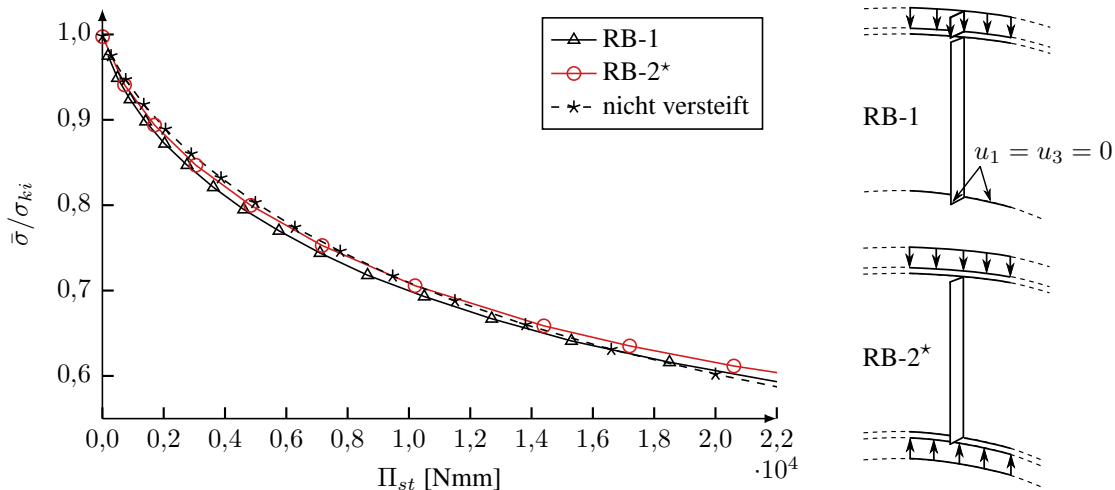


Abbildung 4.33: Einfluss der Randbedingungen für $t_{st} = 4$ mm

Interaktion lokaler und globaler Beulmoden

Theoretische Untersuchungen zur Optimierung der Steifenanordnung von ausgesteiften Platten und Schalentragwerken zeigen, dass eine maximale ideale Beullast dann erreicht wird, wenn eine Überlagerung aus lokalen Beulmoden der Mantelfläche mit globalen Beulmoden auftritt. Gleichzeitig resultiert aus der Interaktion eine erhöhte Empfindlichkeit der gesamten Struktur gegenüber Störungen der Mantelfläche, auch wenn die Imperfektionsempfindlichkeit bei getrennter Betrachtung der Versagensformen vergleichsweise gering ist [8], [34], [73]. Die Gegebenheit, dass die erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit mit Bauteilexperimenten nicht bestätigt werden konnte, begründet KOITER [34] mit deren schnellen Abfallen bei zunehmender Imperfektionsamplitude, sofern der lokale Mode aufgrund eines ausreichend geringen Steifenabstandes ein stabiles Nachbeulverhalten aufweist, s. auch [49].

Nachfolgend ist der Einfluss von Interaktionseffekten für die in Tabelle 4.12 angegebenen Zylinder mit variierender Steifenanzahl bei konstanten Aussteifungskennzahlen untersucht. In Abhängigkeit der auftretenden Beulformen erfolgt die Normierung der Störenergie auf Grundlage der Wandstärke t (lokales Beulen) bzw. unter Verwendung der verschmierten Wandstärke t_m (globales Beulen), s. Kapitel 4.3.

Abbildung 4.34 zeigt die Entwicklung der Grenzlasten bei Variation der Steifenanzahl für unterschiedliche Niveaus der bezogenen Störenergie. Für $\pi_{st} = 0$ entsprechen die Grenz-

Tabelle 4.12: Untersuchte Zylinder mit $r/t = 300$ und RB-2

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	n_{st} [-]	ϑ [°]	k_s [-]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	σ_{ki}/σ_{cl} [-]
1-f	300	300	1,0	6,0	22,5	8	45,0	3,94	0,57	1,72	0,85
2-f	300	300	1,0	6,0	15,0	12	30,0	2,62	0,57	1,72	0,93
3-f	300	300	1,0	6,0	7,2	25	14,4	1,26	0,57	1,72	1,16
4-f	300	300	1,0	6,0	6,0	30	12,0	1,05	0,57	1,72	1,22
5-f	300	300	1,0	6,0	5,1	35	10,3	0,90	0,57	1,72	1,38
6-f	300	300	1,0	6,0	4,5	40	9,0	0,79	0,57	1,72	1,67
7-f	300	300	1,0	6,0	3,27	55	6,6	0,57	0,57	1,72	1,60
8-f	300	300	1,0	6,0	2,25	80	4,5	0,39	0,57	1,72	1,43
9-f	300	300	1,0	6,0	2,0	90	4,0	0,35	0,57	1,72	1,40
10-f	300	300	1,0	-	-	-	-	-	-	-	0,83

lasten den Beullasten im Verzweigungspunkt σ_{ki} . Der dimensionslose Parameter k_s nach KOITER [32] (s. Gleichung 4.1) beschreibt das Stabilitätsverhalten der Schalensegmente hinsichtlich lokalem Beulversagen. In Abhängigkeit des Steifenabstandes b_{st} sowie der mit r und t repräsentierten Zylindergeometrie dominiert entweder das überkritische Tragverhalten ebener Plattenstreifen oder das durch die Krümmung der Mantelfläche bedingte imperfektionsempfindliche Schalenbeulen. Abbildung 4.38b macht dies anhand qualitativer Last-Verformungs-Kurven deutlich. Erst für $k_s \geq 0,64$ entwickelt sich ein instabiler Nachbeulbereich, welcher mit zunehmendem Wert stärker ausgeprägt ist.

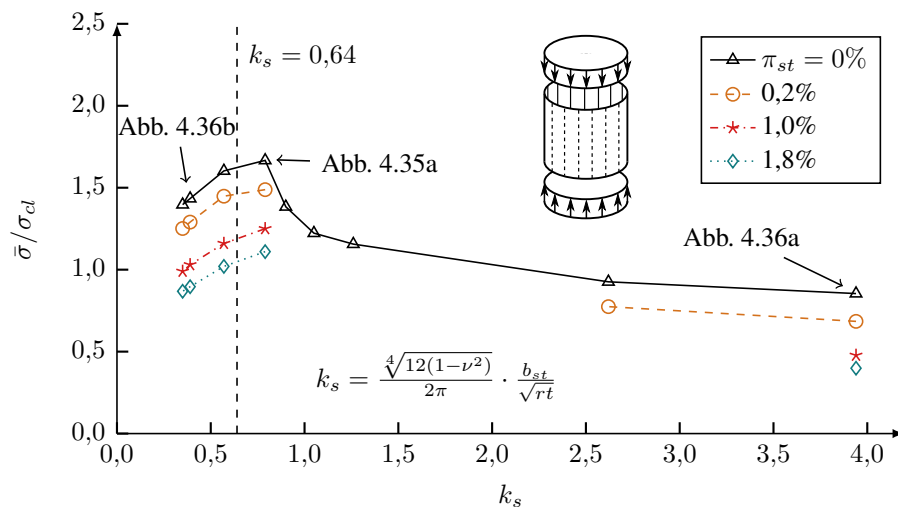


Abbildung 4.34: Grenzlasten bei variierenden Steifenabständen

Aus den mit $\pi_{st} = 0$ beschriebenen Beullasten σ_{ki} geht hervor, dass für Zylinder 6-f mit $k_s = 0,79$ eine maximale Tragfähigkeitssteigerung infolge der Aussteifung erreicht wird. Dem kleinsten Eigenwert ist die in Abbildung 4.35a gezeigte Verformungsfigur zugeordnet, welche für eine bezogene Beullast von $\sigma_{ki,lok}/\sigma_{cl} = 1,67$ ermittelt wird und durch lokales Beulen der Mantelfläche ohne wesentliche Verformungen der Steifen dominiert ist. Für die erste globale Beulform folgt $\sigma_{ki,glob}/\sigma_{cl} = 1,70$, s. Abbildung 4.35b. Der so-

mit geringe Unterschied zwischen den Beullasten weist auf eine ausgeprägte Interaktion der Beulmoden hin. Nachfolgend ist mit $\sigma_{ki} = \sigma_{ki,lok}$ die Beullast, welche aus der lokalen Beulform folgt, als maßgebende Beullast betrachtet. Wird die Steifenanzahl erhöht bzw. reduziert ist das Stabilitätsverhalten, bei gleichzeitiger Abnahme der kritischen Last, deutlicher durch globales bzw. lokales Beulversagen charakterisiert und der Interaktionseffekt nimmt ab. Abbildung 4.36 zeigt die Beulformen für Zylinder 1-f und 8-f, bei welchen keine Überlagerungen globaler und lokaler Verformungsanteile erkennbar sind.

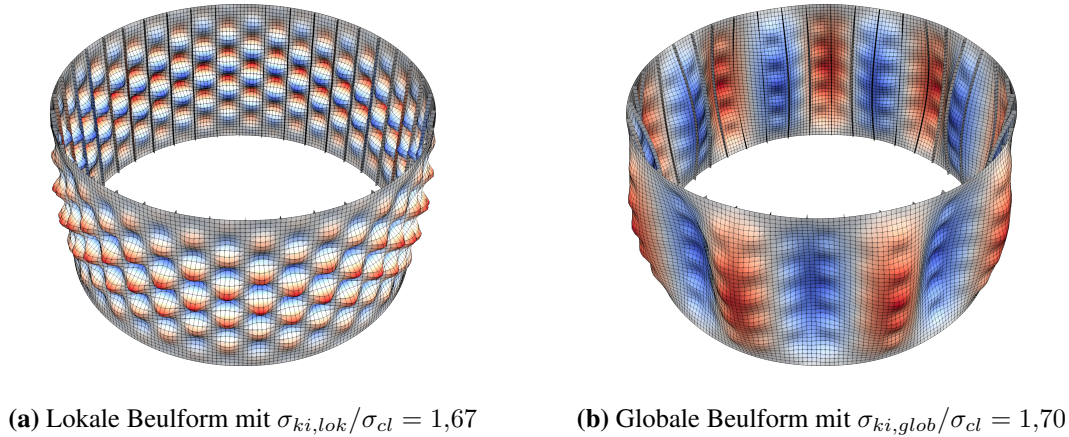


Abbildung 4.35: Benachbarte Beulformen für Zylinder 6-f ($k_s = 0,79$)

Die Verteilung der aus den 50 kleinsten Eigenwerten resultierenden Beullasten ist exemplarisch für die Zylinder 6-f und 8-f in Abbildung 4.37 dargestellt. Obwohl für ersteren mit $k_s = 0,79$ der Grenzwert für überkritisches Tragverhalten des Schalensegmentes überschritten ist, sind insgesamt 46 Eigenformen durch globale und lediglich 4 Eigenformen durch lokale Verformungsanteile dominiert. Die Beullasten liegen in einem Bereich von $\sigma_{ki}/\sigma_{cl} = 1,67 \div 1,74$. Aufgrund der erhöhten Steifenanzahl treten für Zylinder 8-f ausschließlich globale Beulformen bei gleichzeitig breiterem Eigenwertspektrum auf.

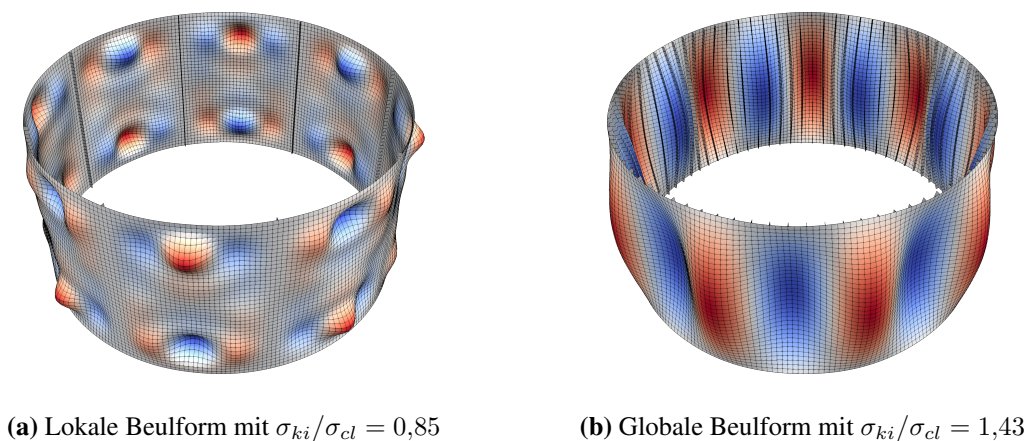


Abbildung 4.36: Beulformen des ersten Verzweigungspunktes für Zylinder 1-f (a) und Zylinder 8-f (b)

Eine Identifikation kritischer Störungen führt für zunehmende Niveaus der bezogenen Störenergie auf eine entsprechende Reduktion der Grenzlasten. Die Normierung der Stö-

renergie erfolgt für Zylinder 6-f, welcher am stärkste durch eine Interaktion von Beulmoden betroffen ist, auf Grundlage der verschmierten Wandstärke, da die kritische Störung bereits für Grundzustände in unmittelbarer Nähe zum Verzweigungspunkt deutliche radiale Verformungen der Steifen aufweist, s. Abbildung 4.41a. Für die schwächer aussteiften Zylinder 3-f bis 5-f sind ausschließlich die Beullasten ($\pi_{st} = 0$) angegeben, da die Identifikation kritischer Störungen nur für Grundzustände kurz unterhalb des Verzweigungspunktes mit Störenergien $\pi_{st} < 0,2\%$ gelingt. Die Störformen sind dabei durch lokale Verformungen der Mantelfläche geprägt.

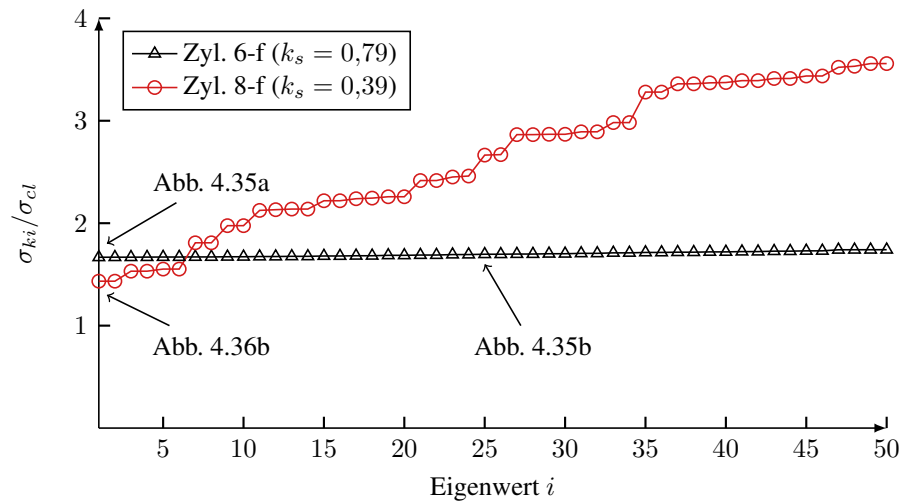


Abbildung 4.37: Beullasten der 50 kleinsten Eigenwerte

Abbildung 4.38a zeigt exemplarisch eine überhöht dargestellte Störform für Zylinder 4-f mit $k_s = 1,05$, welche den lokalen Charakter der Störung verdeutlicht. Dies deutet darauf hin, dass nach lokalem Beulen ein vergleichsweise geringer Lastabfall eintritt bevor wieder ein stabiler Gleichgewichtspfad erreicht ist. Eine analytische Betrachtung mittels k_s legt ebenfalls das beschriebene Stabilitätsverhalten nahe. Mit $k_s = 1,26/1,05/0,90$ ist der Grenzwert für überkritisches Tragverhalten des Schalensegmentes für die genannten Fälle überschritten, wenngleich der instabile Nachbeulbereich so gering ausgeprägt ist, dass kritische Zustände nur für vergleichsweise hohe Grundlastniveaus ermittelbar sind.

Die mit den Störenergien in Abbildung 4.39 und 4.40 dargestellten Imperfektionsempfindlichkeiten korrelieren für den größten Teil der Grundlastniveaus mit den Beullasten. Bei lokalem Beulen ist für Zylinder 1-f kein wesentlicher Unterschied zur nicht aussteiften Schale vorhanden, während bei erhöhter Steifenanzahl mehr Störenergie in das System einzubringen ist, um einen kritischen Zustand zu erreichen. Die hier nicht explizit dargestellten Störformen zeigen jeweils eine vergleichbare lokal begrenzte Einzelbeule in einem Schalensegment. Da die Steifen für Zylinder 2-f aufgrund des reduzierten Steifenabstandes stärker am Beulprozess beteiligt sind, ist trotz identischer Schlankheiten und der lokalen Beulcharakteristik eine verringerte Imperfektionsempfindlichkeit gegeben.

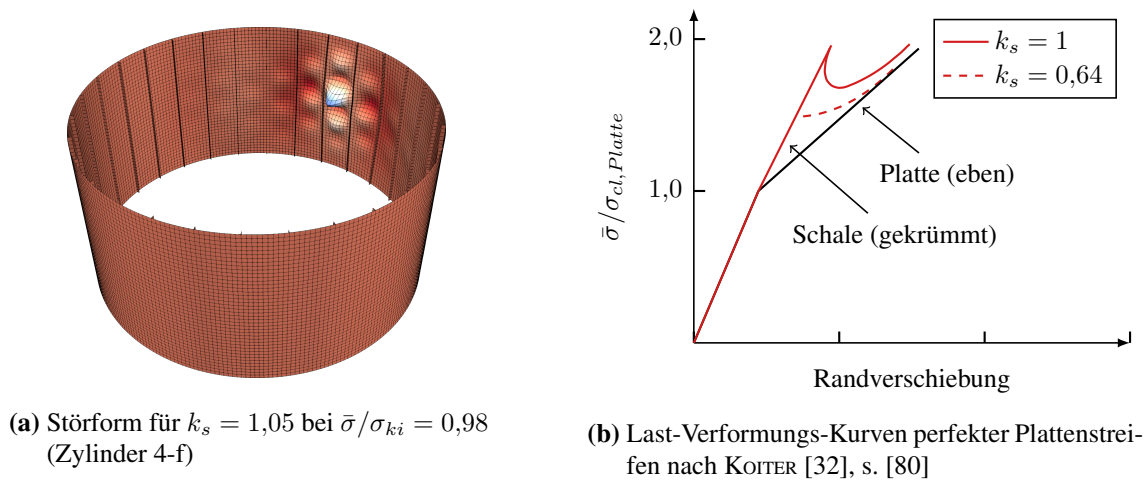


Abbildung 4.38: Lokales Beulen der Mantelfläche

Ein Vergleich der global beulenden Zylinder in Abbildung 4.40 macht deutlich, dass ab $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} > 0,9$ die minimale bezogene Störenergie für Zylinder 6-f ermittelt wird. Dieser weist damit neben der maximalen Beullast eine erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit im Bereich hoher Grundlastniveaus auf, wenngleich der Effekt gering ausgeprägt ist. Dies entspricht dem oben erläuterten Zusammenhang zwischen der Anfälligkeit der Gesamtstruktur gegenüber Störungen und einer Interaktion lokaler und globaler Beulmoden. Auch der von KOITER [34] beschriebene schnelle Rückgang der Imperfektionsempfindlichkeit mit zunehmender Amplitude der Störung wird durch den Kurvenverlauf abgebildet.

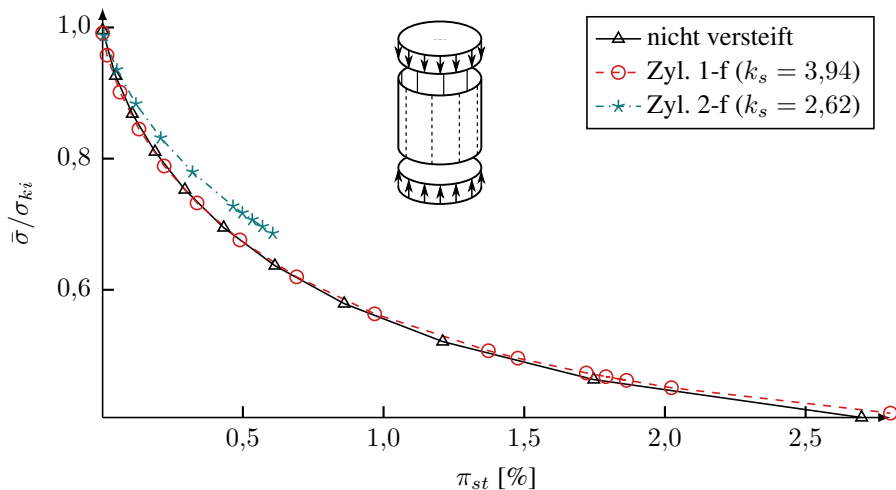


Abbildung 4.39: Störenergieverläufe lokal beulender Zylinder

Für eine Bemessung im Rahmen des GMNIA-Nachweisformates der DIN EN 1993-1-6, sollte die angesetzte Imperfektionsform globale und lokale Anteile beinhalten, um alle Formen möglichen Stabilitätsversagens zu berücksichtigen. Abbildung 4.36 macht deutlich, dass dies bei einer Verwendung der Beulform des ersten Verzweigungspunktes nicht zwangsläufig gegeben ist. Alternativ ist die Kombination verschiedener Eigenformen möglich. Die praktische Anwendung zeigt jedoch, dass unter Umständen sehr viele der mit

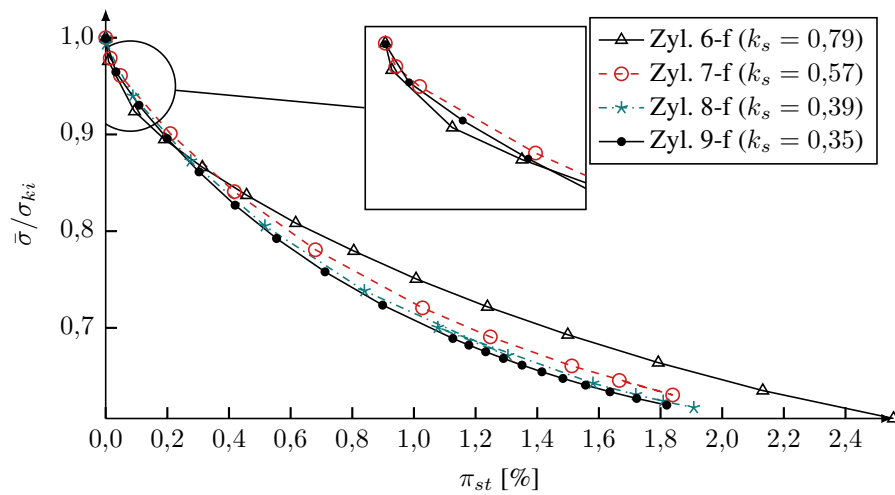
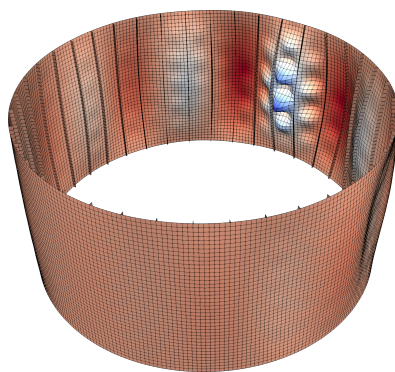


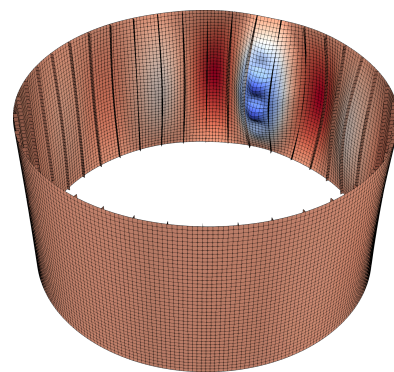
Abbildung 4.40: Störenergie global beulender Zylinder

den kleinsten Eigenwerten assoziierten Beulformen lokalen Charakter aufweisen und eine Berechnung globaler Eigenformen nicht praktikabel ist [82].

Bei einer Identifikation kritischer Störungen mit Hilfe des Störenergiekonzeptes tritt die beschriebene Problematik nicht auf. Abbildung 4.41 zeigt überhöhte Störformen für den Zylinder mit maximaler Interaktion und macht die Überlagerung globaler und lokaler Anteile sowie die Abhängigkeit der Amplituden vom Grundzustand deutlich. Befindet sich dieser mit $\bar{\sigma} / \sigma_{ki} = 0,98$ kurz unterhalb des lokalen Verzweigungspunktes, ist eine Überlagerung globaler und lokaler Störanteile zu erkennen. Mit abnehmendem Niveau der Grundbelastung bildet sich die kurzwellige Störung der Mantelfläche zurück und der globale Anteil in Form einer in Ringrichtung örtlich begrenzten Einzelbeule dominiert die Störform. Wird die mit dem kleinsten Eigenwert assoziierte Beulform (Abbildung 4.35a) als Imperfektion auf die perfekte Schale aufgebracht, ist der globale Charakter der Störung nicht berücksichtigt.



(a) $\bar{\sigma} / \sigma_{ki} = 0,98$ ($\pi_{st} = 0,01\%$)



(b) $\bar{\sigma} / \sigma_{ki} = 0,80$ ($\pi_{st} = 0,62\%$)

Abbildung 4.41: Störformen für unterschiedliche Grundlastniveaus bei ausgeprägter Interaktion (Zylinder 6-f)

4.4.5 Exzentrizitätseffekt

Experimentelle und theoretische Untersuchungen zeigen, dass neben der Schalen- und Steifengeometrie auch die Anordnung der Steifen auf der Innen- oder Außenseite der Mantelfläche einen erheblichen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten längsversteifter Zylinder haben kann [23], [9]. SINGER et al. [60] begründen den Exzentrizitätseffekt anhand der in der Schale wirkenden Membrankräfte, welche infolge von Beulverformungen auftreten und beschreiben zwei gegensätzlich wirkende Anteile. Je nach Richtung der radialen Verschiebungen bilden sich Druck- bzw. Zugkräfte in Meridianrichtung aus. Diese erzeugen, bedingt durch die Exzentrizität zwischen Mantelflächen- und Gesamtschwerpunkt, ein Biegemoment und haben damit einen stabilisierenden bzw. destabilisierenden Einfluss bei externen bzw. internen Steifen zur Folge. Gleichzeitig tritt ein entgegengesetzter Effekt durch die Biegung der Steifen um ihre Flächennormale auf, welche ebenfalls Membrankräfte in der Mantelfläche hervorrufen. Diese wirken infolge der Beteiligung des Gesamtquerschnittes nicht exzentrisch, führen aber in Abhängigkeit der Querdehnzahl zu zusätzlichen Ringmembrankräften. Für den Fall einer externen Aussteifung begünstigen die Membrankräfte die bei einem Beulversagen auftretenden radialen Verschiebungen, sodass eine destabilisierende Wirkung gegeben ist. Für interne Steifen gilt die umgekehrte Beziehung.

Welcher der genannten Anteile dominiert, ist im wesentlichen von der Schalengeometrie abhängig. Der Aussteifungsgrad ist von untergeordneter Bedeutung und beeinflusst lediglich die Ausprägung und nicht die Charakteristik des Exzentrizitätseffektes. Das Normverfahren der ECCS-Recommendations [18] berücksichtigt die Exzentrizität ausschließlich bei einer Berechnung der idealen Beullast im Rahmen der Theorie verschmierter Steifen. Ein unter Umständen vorhandener Einfluss auf die Imperfektionsempfindlichkeit ist nicht erfasst.

Nachfolgend wird der Exzentrizitätseffekt anhand von den in Tabelle 4.13 zusammengefassten Zylinderkonfigurationen untersucht. Die Abmessungen sind derart gewählt, dass jeweils zwei Zylinder identische Aussteifungsgrade bei variierender Schlankheit aufweisen. Mit den Verhältnissen $\sigma_{ki}/\sigma_{cl}^*$ der numerisch ermittelten Beullast zur Beullast nach BLOCK et al. [7] wird deutlich, dass die Theorie verschmierter Steifen den Exzentrizitätseffekt für alle Zylinder näherungsweise gleichwertig abbildet, wenngleich alle Beullasten unterschätzt werden.

Tabelle 4.13: Untersuchte Zylinder mit RB-1 und $\vartheta = 4^\circ$ ($n_{st} = 90$)

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	r/t [-]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	$\sigma_{ki}^{int}/\sigma_{cl}^*$ [-]	$\sigma_{ki}^{ex}/\sigma_{cl}^*$ [-]	$\sigma_{ki}^{ex}/\sigma_{ki}^{int}$ [-]
1-g	150	150	0,5	300	3,0	1,0	0,57	1,72	2,39	2,45	1,74
2-g	150	150	0,38	400	2,25	1,0	0,57	1,72	2,30	2,29	1,61
3-g	300	300	1,0	300	4,0	3,0	0,57	0,76	2,25	2,11	1,37
4-g	400	400	1,0	400	4,0	4,0	0,57	0,76	2,35	2,19	1,32

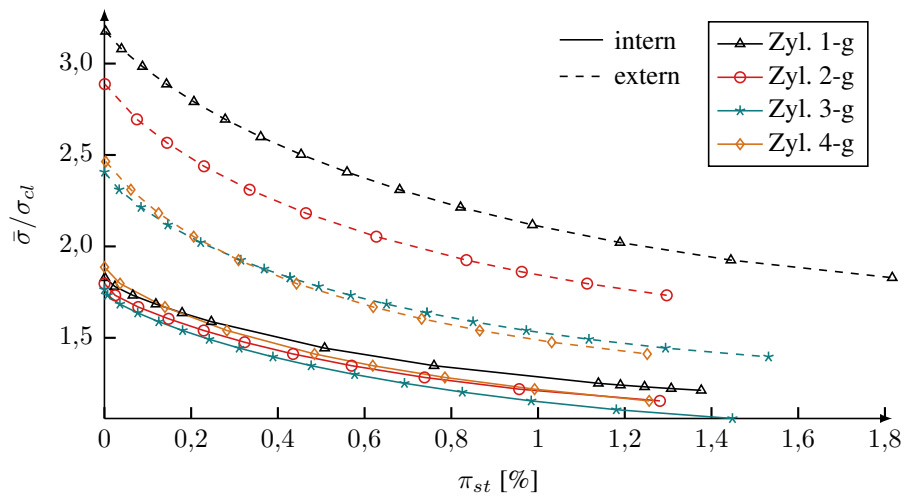


Abbildung 4.42: Störenergie für interne und externe Steifenanordnung

Aus den Verhältnissen der numerisch ermittelten Beullasten $\sigma_{ki}^{ex}/\sigma_{ki}^{int}$ sowie aus den Störenergieverläufen in Abbildung 4.42 geht hervor, dass für alle Zylinder bei externer Steifenanordnung höhere Beullasten vorliegen als bei identischer interner Aussteifung. Darüber hinaus weichen die bezogenen Beullasten für interne Steifen nur geringfügig voneinander ab, während für eine externe Aussteifung in Abhängigkeit der Aussteifungskennzahl \bar{I}_{st} unterschiedliche Differenzen zwischen den bezogenen Beullasten für die untersuchten Schlankheiten r/t auftreten. Unabhängig von der Steifenanordnung ist kein direkter Zusammenhang zwischen der Schlankheit und einer Zunahme der Beullast gegenüber der nicht versteiften Schale erkennbar. Während für die mit $\bar{I}_{st} = 1,72$ stärker ausgesteiften Schalen für $r/t = 300$ (Zylinder 1-g) die maximale Beullast ermittelt wird, gilt dies bei $\bar{I}_{st} = 0,76$ für $r/t = 400$ (Zylinder 4-g).

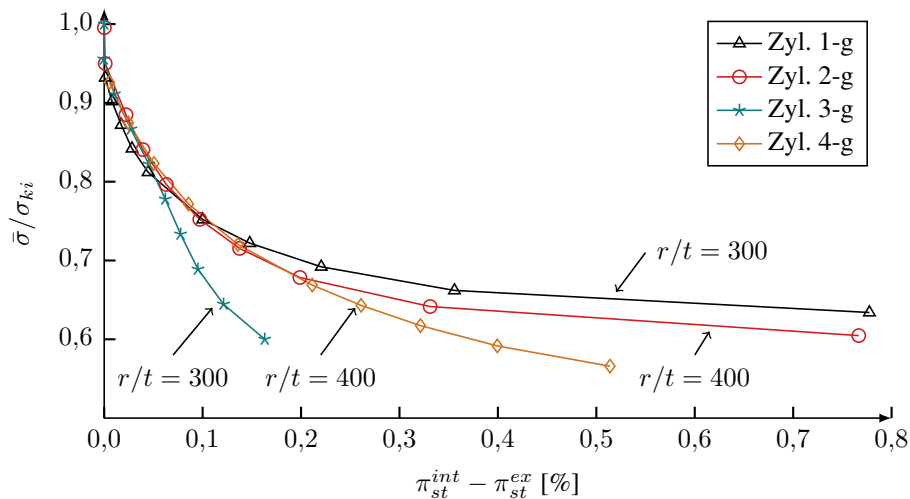


Abbildung 4.43: Differenz der bezogenen Störenergie für interne und externe Steifenanordnung

Dem positiven Effekt einer erhöhten Beullast infolge externer Aussteifung steht für alle betrachteten Zylinder eine größere Imperfektionsempfindlichkeit gegenüber. Dies wird durch die Differenz der bezogenen Störenergien, welche sowohl durch die Schlankheit, den Aussteifungsgrad als auch das Lastniveau beeinflusst ist, in Abbildung 4.43 deutlich. So ist für die stärker ausgesteiften Zylinder 1-g und 2-g im Bereich niedriger Grundlastniveaus der Unterschied zwischen interner und externer Aussteifung für die schlankere Schale geringer ausgeprägt. Für die Zylinder 3-g und 4-g gilt jedoch der umgekehrte Zusammenhang.

4.5 Ringversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung

Einen weit verbreiteten Anwendungsfall ringversteifter Zylinder im Bauwesen stellen Behälter- und Silotragwerke dar. Dabei ermöglicht eine Aussteifung den effizienten Abtrag primärer Lasten aus Windeinwirkung und Manteldruck. Ein positiver Einfluss von Ringsteifen auf das Beulverhalten bei axialer Druckbeanspruchung wird im Rahmen einer Bemessung nach aktuell gültiger Normung jedoch nur unzureichend berücksichtigt [27].

Abbildung 4.44 zeigt die Geometrie der nachfolgend untersuchten ringversteiften Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung. Da das Tragwerk, im Gegensatz zu längsversteiften Zylindern, Rotationssymmetrie aufweist, erfolgen alle Untersuchungen an einem Berechnungsausschnitt von 180° . Die gewählte Diskretisierung orientiert sich an einem Elementierungsgrad von $k_{Ele} = 4$, s. Kapitel 4.2.1. Wenn die durch k_{Ele} definierte Elementanzahl aufgrund der Steifenabstände nicht abgebildet werden kann, erfolgt die Diskretisierung in Meridianrichtung mit dem nächst höheren Vielfachen von $n_{st} + 1$. Durch die mit den Ringsteifen eingebrachten Zwänge ist lokales Beulversagen der Mantelfläche möglich, bei welchem sich eine an den Steifenabstand angepasste Beulwellenlänge in Meridianrichtung einstellt. Für diese Fälle folgt die Elementanzahl auf einer halben Beulwellenlänge aus der Diskretisierung der Schalensegmente und entspricht damit unter Umständen nicht dem Kriterium $k_{Ele} = 4$. Vergleichende Untersuchungen für die nachfolgend betrachteten Zylinder zeigen jedoch, dass die Abweichungen der Beullasten zu einer um $n_{st} + 1$ erhöhten Elementanzahl in Meridianrichtung kleiner als 2% sind.

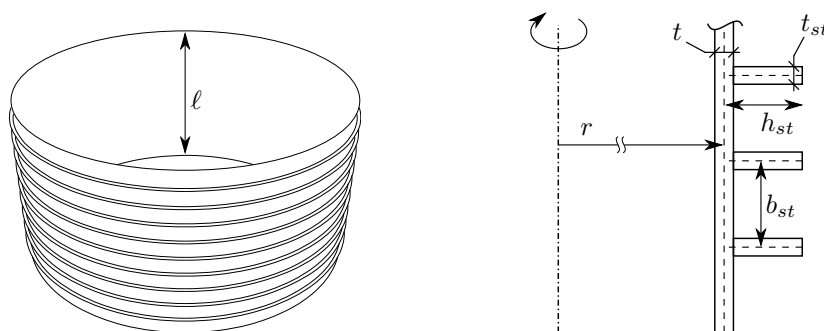


Abbildung 4.44: Zylinder mit externen Ringsteifen

4.5.1 Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis

Die nachfolgenden Untersuchungen vergleichen numerische Berechnungsergebnisse mit dem spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweis für nicht ausgesteifte Zylinder nach DIN EN 1993-1-6 [12], da für ringversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung kein explizites Bemessungsverfahren angegeben ist. Aufgrund der äquivalenten Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit durch eine Abminderung der idealen Beul-last sind die Ergebnisse auch auf das numerisch gestützte LBA/MNA-Nachweisformat übertragbar.

Abbildung 4.45 stellt den Beulabminderungsfaktor α_x experimentell ermittelten Beul-lasten für globales Beulversagen sowie Berechnungsergebnissen für die in Tabelle 4.14 zusammengefassten Zylinder gegenüber. Die Abmessungen sind derart gewählt, dass die verschmierte Schlankheit bei konstanten Aussteifungskennzahlen variiert. Die Anzahl an Beulhalbwellen zwischen zwei Steifen, welche aus der Periodenlänge T für eine nicht versteifte Schale nach linearer Biegetheorie folgt, ist mit $\bar{b}_{st} = 2b_{st}/T$ bezeichnet. Bei allen Zylindern sind $n_{st} = 13$ Ringsteifen angeordnet.

Tabelle 4.14: Untersuchte Zylinder mit RB-1

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	t [mm]	r/t [-]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	\bar{b}_{st} [-]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]	σ_{ki}/σ_{cl} [-]
1-h	300	300	2,0	150	11,4	1,0	0,36	0,27	0,72	831,2	1,09
2-h	300	300	1,0	300	5,70	1,0	0,50	0,27	0,72	415,6	1,13
3-h	300	300	0,66	450	3,80	1,0	0,62	0,27	0,72	277,0	1,04
4-h	300	300	0,5	600	2,85	1,0	0,72	0,27	0,72	207,8	1,00
5-h	300	300	0,4	750	2,28	1,0	0,80	0,27	0,72	166,2	0,99

Die Versuchsergebnisse für ringversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung stammen aus unterschiedlichen Forschungsarbeiten und sind von BARLAG [3] zusammen-gestellt. Nachfolgend sind ausschließlich Versuchsergebnisse für Probekörper berücksich-tigt, bei welchen globales Beulen aufgetreten ist und die ermittelte Beulspannung kleiner als die Fließgrenze des jeweiligen Materials ist. In Abhängigkeit des Aussteifungsgrades erfolgt eine Einteilung der Experimente in die Bereiche $\bar{A}_{st} < 0,27$ und $\bar{A}_{st} \geq 0,27$. Für den Längenbereich gilt $0,9 < l/r < 1,4$ und für das bezogene Flächenträgheitsmoment $0,05 < \bar{I}_{st} < 4,70$.

Sowohl die experimentell als auch die numerisch ermittelten Beullasten verdeutlichen, dass die Aussteifung unabhängig von der Schlankheit der Schale eine erhöhte Tragfä-higkeit gegenüber dem nicht ausgesteiften Zylinder zur Folge hat. Während die Kurve für $\pi_{st} = 0$ und Schlankheiten $r/t \geq 450$ annähernd horizontal verläuft, ist für gedrun-genere Schalen ein Anstieg der Beullasten erkennbar, obwohl alle Zylinder identische Aussteifungskennzahlen \bar{A}_{st} und \bar{I}_{st} aufweisen. Der unterschiedlich starke Einfluss der Ringsteifen ist dadurch begründet, dass für gedrungene Zylinder großflächige Beulmus-ter maßgebend werden und die Steifen entsprechend stark am Beulprozess beteiligt sind.

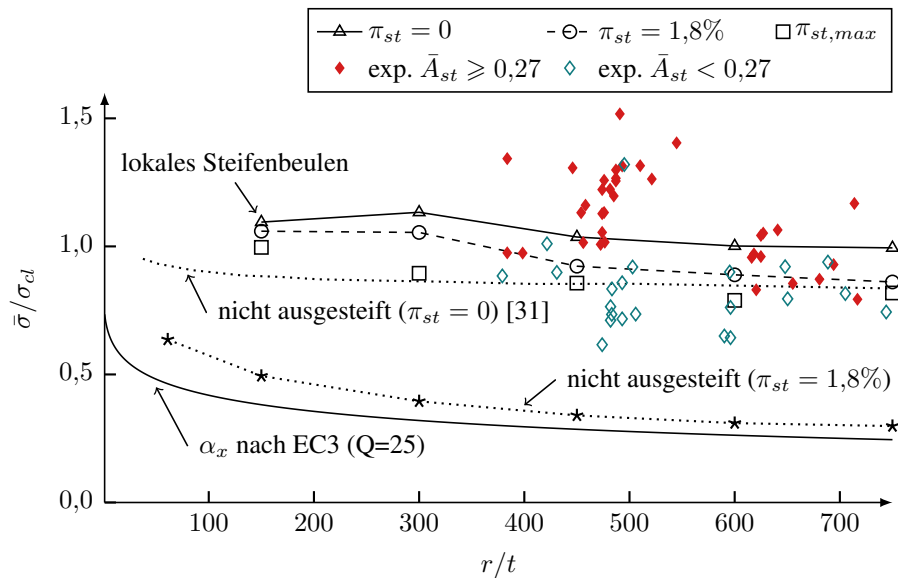


Abbildung 4.45: Vergleich von numerisch und experimentell ermittelten Grenzlasten

Mit steigender Schlankheit sind die Beulformen hingegen zunehmend durch kurzwellige Verformungen der Mantelfläche geprägt. Aufgrund der gewählten Steifenanzahl ist dennoch ein Einfluss der Steifen für alle untersuchten Zylinder vorhanden, da deren Abstand mit $\bar{b}_{st} < 1,0$ die halbe Periodenlänge T der linearen Biegetheorie (Gleichung 4.13) unterschreitet. Dies wird sowohl mit den angegebenen Beullasten für nicht ausgesteiften Schalen ($\pi_{st} = 0$), als auch durch die in Abbildung 4.46a und 4.46b exemplarisch dargestellten Beulformen bestätigt. Wenngleich für den rotationssymmetrischen Fall nur geringfügige radiale Verschiebungen der Steifen auftreten und deren Schnittkurven mit der Mantelfläche annähernd in den Wendepunkten der Beulwellen lokalisiert sind, wird durch den Steifenabstand ein Beulmuster erzwungen, welches gegenüber der nicht versteiften Schale eine erhöhte Beullast zur Folge hat. Eine Zuordnung der Art der Beulform zu spezifischen Schlankkeitsbereichen ist für die untersuchten Zylinder nicht möglich.

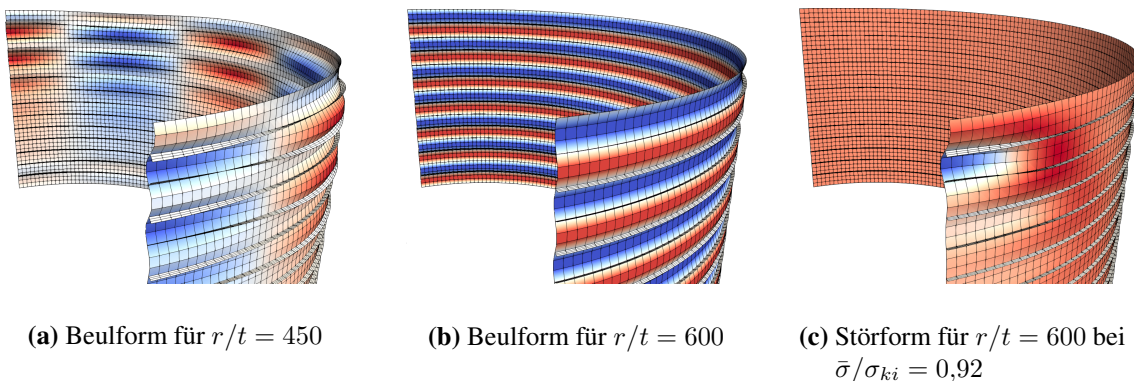


Abbildung 4.46: Beul- und Störformen bei variierender Schlankheit

Der Einfluss einer nicht anfänglichen Störung wird durch die für $\pi_{st} = 1,8\%$ angegebenen Grenzlasten deutlich. Äquivalent zu längsversteiften Zylindern gelingt es nicht ein Beul-

kriterium zu definieren, welches das durch α_x beschriebene Sicherheitsniveau abbildet. Eine untere Grenzwertkurve für die experimentell ermittelten Beullasten für $\bar{A}_{st} \geq 0,27$ kann hingegen zutreffend angegeben werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Beullasten, welche für $r/t > 600$ unterhalb der Grenzwertkurve liegen, an Probekörpern mit $\bar{I}_{st} < 0,6$ ermittelt wurden. Die Störformen aller untersuchten Tragwerke sind durch die charakteristische Einzelbeule axial gestauchter nicht versteifter Zylinder geprägt und machen die Mitwirkung der Steifen am Beulprozess deutlich, s. Abbildung 4.46c.

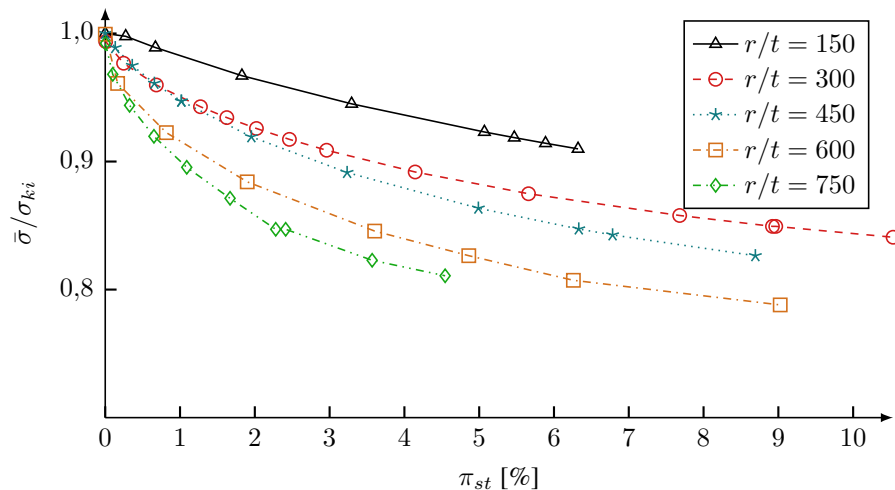


Abbildung 4.47: Störenergie bei variierender Schlankheit

Aus den in Abbildung 4.47 dargestellten Störenergien geht hervor, dass die Imperfektionsempfindlichkeit größtenteils unabhängig vom Niveau der Grundbelastung mit steigender Schlankheit zunimmt. Lediglich im Bereich $\bar{\sigma}/\sigma_{ki} > 0,96$ unterschreitet π_{st} für $r/t = 300$ die Werte für $r/t = 450$ geringfügig.

Aufgrund der Vielzahl unterschiedlicher Faktoren, welche das Beulverhalten ausgesteifter Schalentragwerke beeinflussen, ist die Definition von Beulkriterien über einen Vergleich experimentell und numerisch ermittelter Grenzlaster nur in Abhängigkeit ausgewählter geometrischer Parameter sinnvoll.

Interaktion lokaler und globaler Beulmoden

Mit abnehmender Schlankheit ist eine zunehmend größere Steifenhöhe h_{st} erforderlich, um für alle betrachteten Zylinder identische Aussteifungskennzahlen zu gewährleisten. Dies führt dazu, dass lokales Beulen der Ringsteifen, welche durch das Abklingverhalten der Mantelfläche sowohl durch Druck- als auch Zugspannungen beansprucht sein können, für gedrungene Schalen an Bedeutung gewinnt. So ist die in Abbildung 4.45 gezeigte Abnahme der Beullast beim Übergang von $r/t = 300$ zu $r/t = 150$ auf den Einfluss des lokalen Steifenbeulens zurückzuführen. Die in Abbildung 4.48a dargestellte Beulform zeigt entsprechende globale Verformungsanteile der Mantelfläche bei gleichzeitiger Verwindung der Steifen. Dazu passend beschreibt die kritische Störung neben der cha-

rakteristischen Einzelbeule auch kurzwellige Verformungen von Ringsteifen, welche im Grundzustand Druckspannungen aufweisen, s. Abbildung 4.48b.

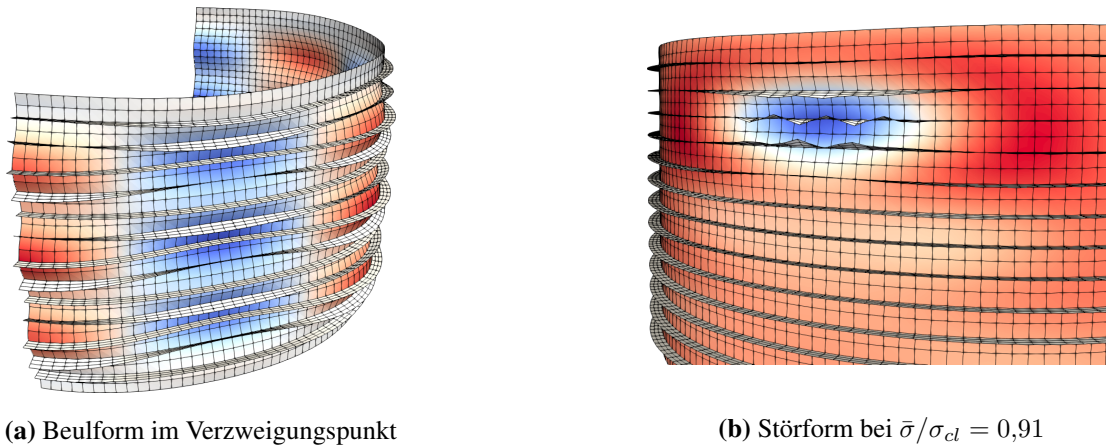


Abbildung 4.48: Beul- und Störform für $r/t = 150$

4.5.2 Einfluss des Aussteifungsgrades

Der Einfluss des Aussteifungsgrades auf die Grenzlasten ist nachfolgend für die in Tabelle 4.15 zusammengefassten Zylinder mit Schlankheiten von $r/t = 300$ und $r/t = 400$ sowie $n_{st} = 13$ Steifen untersucht. Die Abmessungen sind derart gewählt, dass für alle Fälle ein konstantes bezogenes Flächenträgheitsmoment von $\bar{I}_{st} = 0,5$ vorliegt. Abbildung 4.49 stellt die ermittelten Grenzlasten den aus [3] entnommenen Versuchsergebnissen gegenüber, wobei diese wiederum in Bereiche mit $\bar{I}_{st} \geq 0,5$ und $\bar{I}_{st} < 0,5$ eingeteilt sind.

Tabelle 4.15: Untersuchte Zylinder mit RB-1

Zyl.	r [mm]	ℓ [mm]	r/t [-]	t [mm]	h_{st} [mm]	t_{st} [mm]	\bar{b}_{st} [-]	\bar{A}_{st} [-]	\bar{I}_{st} [-]	r/t_m [-]	σ_{ki}/σ_{cl} [-]
1-i	300	300	300	1,0	5,48	0,78	0,25	0,20	0,50	250,0	1,09
2-i	300	300	300	1,0	3,87	2,21	0,25	0,40	0,50	214,3	1,18
3-i	300	300	300	1,0	3,16	4,07	0,25	0,60	0,50	187,5	1,27
4-i	300	300	300	1,0	2,74	6,26	0,25	0,80	0,50	166,7	1,35
5-i	400	400	400	1,0	5,48	1,04	0,29	0,20	0,50	333,4	1,05
6-i	400	400	400	1,0	3,87	2,95	0,29	0,40	0,50	285,7	1,10
7-i	400	400	400	1,0	3,16	5,42	0,29	0,60	0,50	250,0	1,12
8-i	400	400	400	1,0	2,74	8,35	0,29	0,80	0,50	222,2	1,15

Mit steigendem Aussteifungsgrad nehmen auch die Grenzlasten kontinuierlich zu. Für die mit $r/t = 400$ schlankeren Schalen verläuft die Kurve der bezogenen Beullasten insgesamt flacher. Dies ist, äquivalent zu den Ausführungen in Kapitel 4.5.1, durch das veränderte Abklingverhalten von Biegeverformungen der Mantelfläche begründet. Während

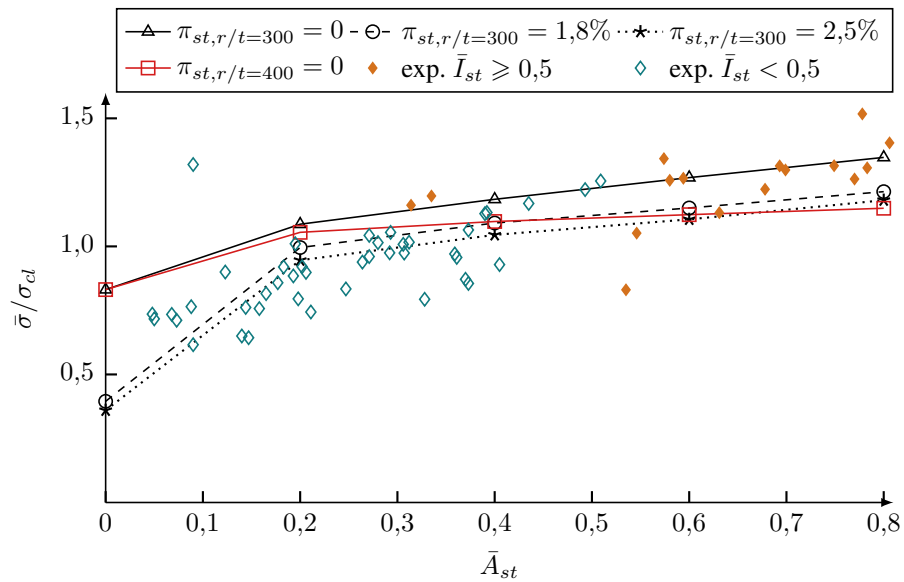
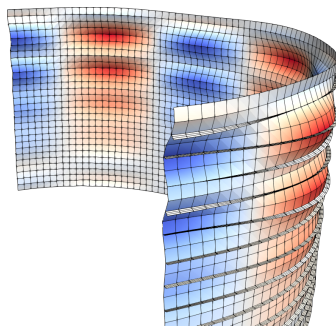


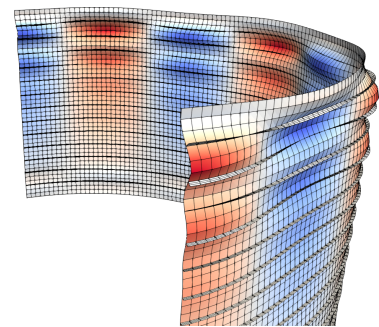
Abbildung 4.49: Grenzlasten in Abhängigkeit des Aussteifungsgrades \bar{A}_{st}

für die gedrunenen Schalen globale Beulmoden mit entsprechenden radialen Verschiebungen der Steifen auftreten, ist die Verformungsfigur im Nachbeulbereich bei erhöhter Schlankheit zunehmend durch lokales Beulen der Mantelfläche dominiert. Die mit dem Störenergiekonzept ermittelten Grenzlasten sind für $r/t = 300$ und bezogene Störenergien von $\pi_{st} = 1,8\%$ und $\pi_{st} = 2,5\%$ angegeben. Eine Abhängigkeit vom Aussteifungsgrad \bar{A}_{st} ist nicht erkennbar.

Abbildung 4.50 zeigt exemplarisch die nicht rotationssymmetrischen Beulformen für einen Aussteifungsgrad von $\bar{A}_{st} = 0,8$. Die Ausdehnung der Beulhalbwellen macht die stärkere Mitwirkung der Steifen am Beulprozess für den Zylinder mit $r/t = 300$ deutlich, wenngleich auch bei erhöhter Schlankheit ein Einfluss vorhanden ist.



(a) $r/t = 300$ (Zylinder 4-i)



(b) $r/t = 400$ (Zylinder 8-i)

Abbildung 4.50: Beulformen für $\bar{A}_{st} = 0,8$

Der Einfluss der Schlankheit auf die Beullasten macht deutlich, dass die Definition eines Beulkriteriums durch Kalibrierung der Störenergie an Versuchsergebnissen nur unter Berücksichtigung der untersuchten Schallengeometrien sinnvoll ist. Die für $\bar{I}_{st} \geq 0,5$

angegebenen experimentellen Beullasten wurden mit einer Ausnahme an Zylindern mit Schlankheiten $r/t > 400$ ermittelt. Dem gegenüber steht eine teilweise um ein Vielfaches von 0,5 größere Aussteifungskennzahl \bar{I}_{st} .

4.6 Zylinderschale mit versteifter Mantelflächenöffnung

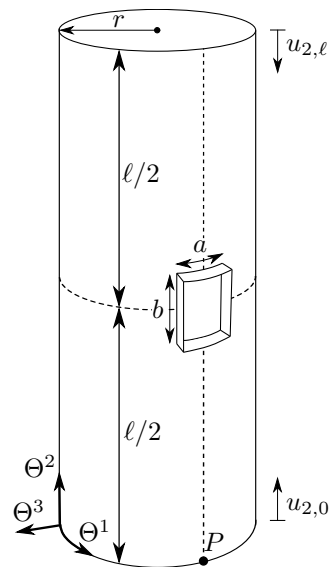
Bei praxisrelevanten Schalentragwerken kann es notwendig sein, Öffnungen in der Mantelfläche vorzusehen, um die Gebrauchstauglichkeit sicherzustellen. Beispiele hierfür sind Inspektions- oder Durchführungsöffnungen in Silos, Kühltürmen und Schornsteinen [52]. Dies führt dazu, dass der für einen effizienten Lastabtrag essenzielle Membranspannungszustand im Vergleich zur nicht geschwächten Schale gestört wird. Der daraus folgenden Abnahme der Tragfähigkeit kann durch eine Anordnung von Steifen im Bereich der Mantelöffnung entgegengewirkt werden.

Nachfolgend ist die in Abbildung 4.51 dargestellte Zylinderschale mit Mantelflächenöffnung betrachtet. Beide Ränder sind gelenkig gelagert und werden unter Vorgabe einer Meridianverschiebung gleichmäßig belastet. Es treten somit ausschließlich axialsymmetrische Vorbeulzustände auf. Dennoch erfolgt eine Modellierung der gesamten Schale, da Beul- und Störformen auch punkt- oder unsymmetrische Verformungszustände aufweisen können. Die Diskretisierung ist mit $n_{Ele,ri} = 160$ Elementen in Ring- und $n_{Ele,me} = 150$ Elementen Meridianrichtung gewählt, was einem Elementierungsgrad von $k_{Ele} = 6$ entspricht. Für die Steifen gilt in Radialrichtung $n_{Ele,st} = 6$. Der Anschluss der Steifen an die Mantelfläche ist dahingehend idealisiert, dass kein Überlappungsrand vorhanden ist und die Abmessungen a und b der Mantelflächenöffnung den Längen der jeweiligen Steifen entsprechen. Mit den gewählten Querschnitten der Längssteifen wird die durch die Mantelflächenöffnung erzeugte Fehlfläche überkompensiert.

Ziel dieses Kapitels ist, neben einer allgemeinen Bewertung des Tragverhaltens von Zylinderschalen mit Mantelflächenöffnung, den Einfluss unterschiedlicher Ersatzimperfektionen auf die Grenzlasten zu untersuchen.

4.6.1 Einfluss der Aussteifung auf das Tragverhalten

Abbildung 4.52 stellt Spannungs-Verschiebungs-Kurven für axial gestauchte Zylinder mit umlaufend versteifter, in Meridianrichtung versteifter sowie nicht versteifter Mantelflächenöffnung gegenüber. Als Vergleichsgrößen sind Ergebnisse für einen Vollzylinder angegeben. Die für kritische Zustände im Sinne des Störenergiekonzeptes ermittelten Verschiebungen sind gestrichelt dargestellt. Um den Steifigkeitsabfall durch die Schwächung des Zylinderquerschnittes hervorzuheben, ist die Meridianspannung σ_P^{22} am Zylinderfuß in Punkt P über der Randverschiebung $u_{2,0}$ aufgetragen, s. Abbildung 4.51. Gegenüber einer Betrachtung der am Zylinderfuß in Ringrichtung gemittelten Spannungen $\hat{\sigma}^{22}$ ist die qualitative Aussage der Ergebnisse infolge des gewählten Vorgehens nicht beeinflusst.



Geometrieparameter:

$$\ell = 600 \text{ mm} \quad t = 1 \text{ mm} \quad r = 100 \text{ mm}$$

$$a = 55 \text{ mm} \quad b = 80 \text{ mm}$$

$$h_{st} = 10 \text{ mm} \quad t_{st} = 3 \text{ mm}$$

Materialparameter:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0,3$$

Randbedingungen bei $\Theta^2 = 0 / \Theta^2 = \ell$:

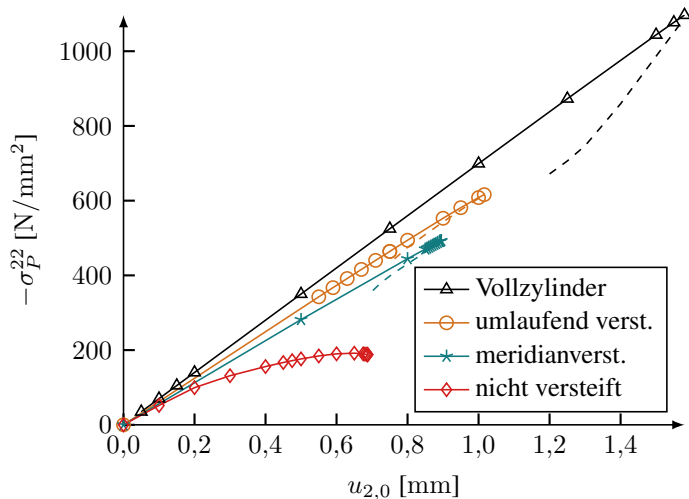
$$u_{1,0} = u_{1,\ell} = 0 \quad u_{3,0} = u_{3,\ell} = 0$$

$$w_{\nu,0} \neq 0 \quad w_{\nu,\ell} \neq 0$$

$$u_{2,0} = -u_{2,\ell} \neq 0$$

Abbildung 4.51: Axial gestauchte Zylinderschale mit umlaufend randversteifter Mantelflächenöffnung

Die mit der Mantelflächenöffnung eingebrachte Störung des Membranspannungszustandes hat eine deutliche Abnahme der Verschiebungen sowie der zugehörigen Meridian-spannung bei Erreichen des ersten Instabilitätspunktes zur Folge. Höhere Grenzspannungen σ_P^{22} werden sowohl mit Längssteifen als auch umlaufenden Randsteifen erzielt. Aufgrund der Belastung durch Vorgabe von Randverschiebungen ist ein Durchschlagen des Tragwerkes nach dem Kriterium aus Gleichung 3.1 nicht möglich. Dementsprechend repräsentieren die mit Hilfe einer begleitenden Eigenwertanalyse ermittelten Indifferenz-zustände im primären Last-Verformungs-Pfad in allen Fällen Verzweigungspunkte.



	Beulspannungen in [N/mm ²]	
	$\sigma_{ki,P}^{22}$	$\hat{\sigma}_{ki}^{22}$
Vollzylinder	1096,8	1096,8
umlaufend verst.	616,1	687,8
meridianverst.	491,5	599,5
nicht verst.	187,8	426,8

Abbildung 4.52: Spannungs-Verschiebungs-Kurven und Beulspannungen der idealen Zylinderschalen

Abbildung 4.53 zeigt Auszüge der zugehörigen Beulformen für die Zylindervarianten mit Mantelflächenöffnung. Die punktsymmetrischen Verschiebungsfelder bestätigen die Notwendigkeit einer Modellierung des Gesamttragwerkes, da diese bei Verwendung von

Symmetrierandbedingungen nicht abgebildet werden können. Des Weiteren ist ersichtlich, dass sich an den Meridianrändern der nicht versteiften Mantelflächenöffnung ein mehrwelliges Beulmuster einstellt. Diese Art der Verformungen wird bei den ausgesteiften Zylindern behindert, sodass die Beulformen im Wesentlichen durch gegenläufige radiale Verschiebungen der Öffnungssecken charakterisiert sind. Die Verformungen entlang der Öffnungsränder in Ringrichtung sind für alle Beulformen ähnlich, weshalb die Anordnung von Ringsteifen die Grenzspannungen weniger stark beeinflusst.

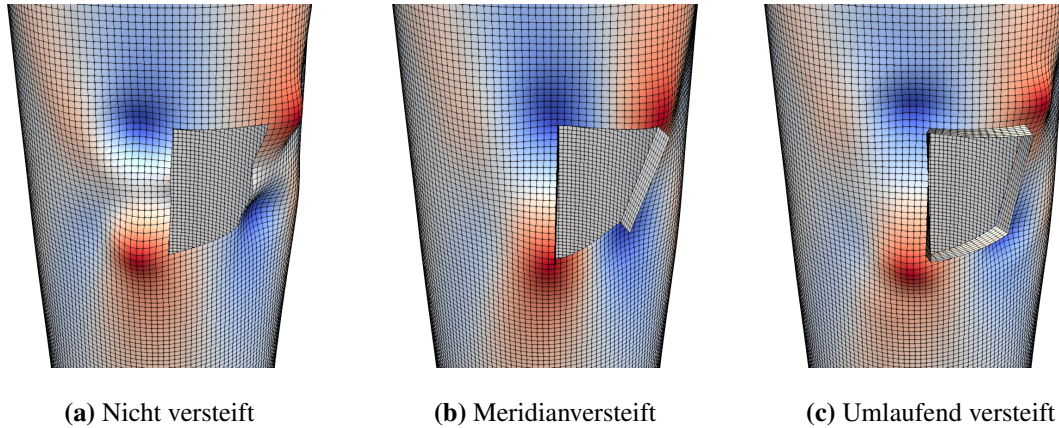


Abbildung 4.53: Beulformen im Verzweigungspunkt

Abbildung 4.54 zeigt die Störenergie in Abhängigkeit der bei $\Theta^{22} = 0$ in Ringrichtung gemittelten Spannungen $\hat{\sigma}^{22}$ der jeweiligen Grundzustände. Die Zunahme der Tragfähigkeit infolge der Aussteifung ist derart ausgeprägt, dass für alle Niveaus der absoluten Spannung $\hat{\sigma}^{22}$ die Schale mit umlaufend versteifter Mantelflächenöffnung die geringste Anfälligkeit gegenüber Störungen aufweist. Um den Einfluss der Steifen auf die Imperfektionsempfindlichkeit im Sinne einer Abminderung der idealen Beullast für ein gewähltes Niveau der Störenergie zu bewerten, ist eine Normierung mit den Spannungen bei Erreichen des Verzweigungspunktes $\hat{\sigma}_{ki}^{22}$ der jeweiligen Schale ausgeführt, s. Abbildung 4.54b.

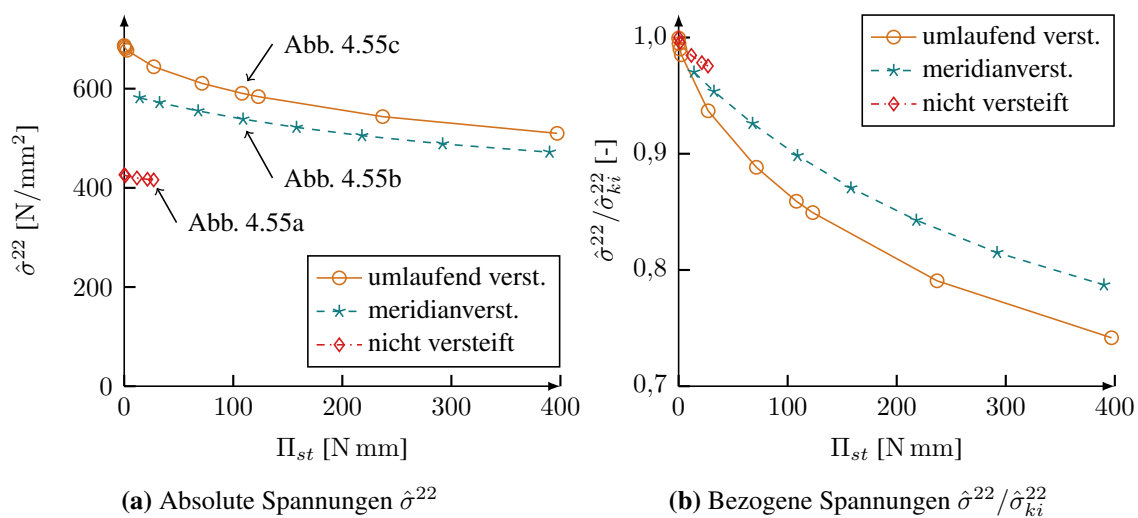


Abbildung 4.54: Störenergie für Zylinder mit Mantelflächenöffnung

Der mit steigender Aussteifung steilere Kurvenverlauf verdeutlicht, dass eine zunehmende Aussteifung neben einer erhöhten Beulspannung mit einer steigenden Imperfektionsempfindlichkeit einhergeht. Wie bereits teilweise für die gleichmäßig versteiften Zylinderschalen der vorherigen Kapitel beobachtet, hat ein über die Störenergie definiertes Beulkriterium damit eine stärkere Abminderung der idealen Beullast zur Folge.

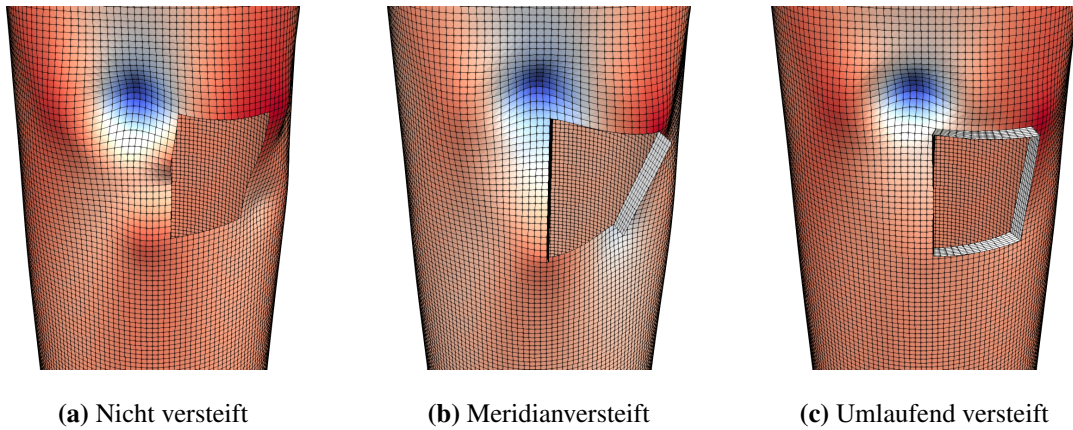
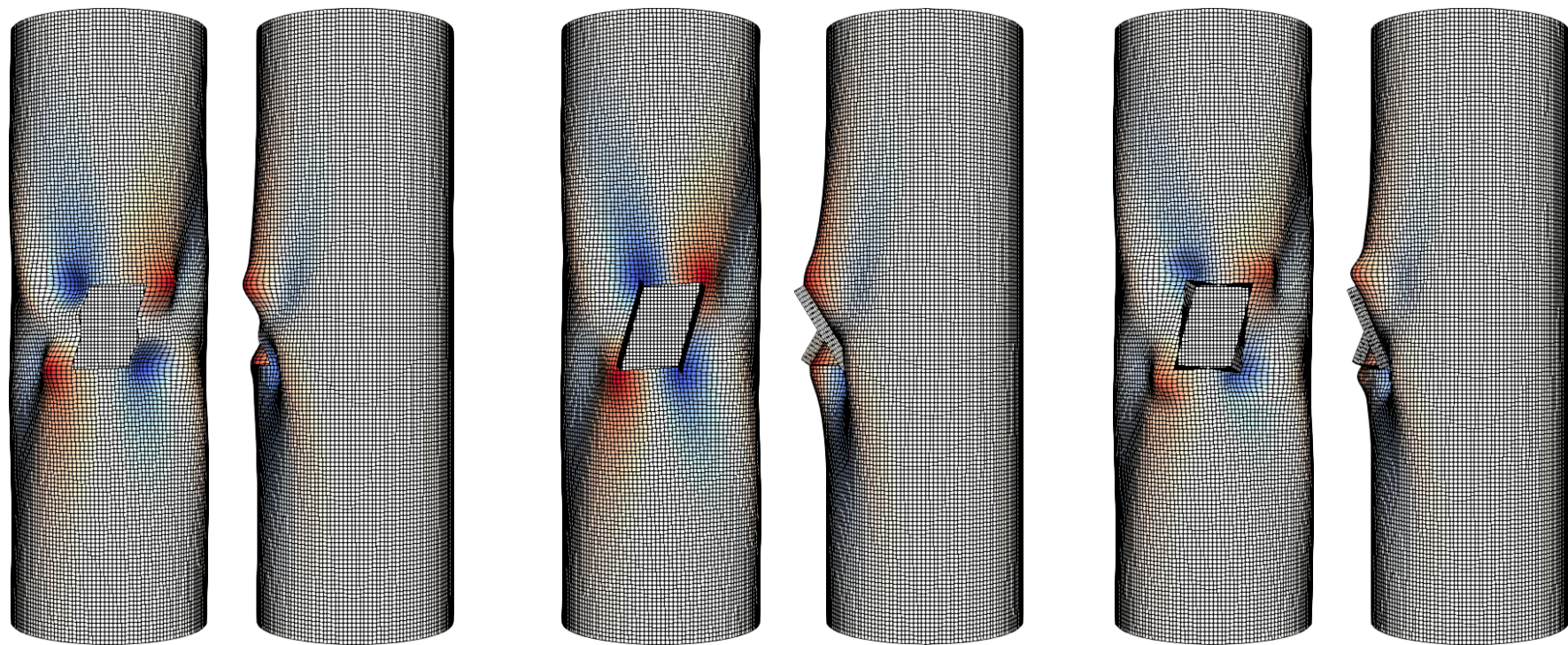


Abbildung 4.55: 30-fach überhöhte Störformen bei $\Pi_{st} = 27$ (a), 109 (b) und 108 (c) N mm

Die in Abbildung 4.55 exemplarisch dargestellten Störformen sind für alle Fälle durch eine lokale Einzelbeule im Eckbereich der Mantelflächenöffnung charakterisiert. Äquivalent zu den Beulformen ist der Einfluss der Steifen durch entsprechend geringere Verformungen der Öffnungsränder ersichtlich. Der graduelle Übergang von der Beulform bei $\Pi_{st} = 0$ (s. Abbildung 4.53c) zu der durch die lokale Einzelbeule geprägten Störform wird auch für die hier betrachtete komplexe Geometrie zutreffend abgebildet. Weitere Ansichten der Beul- und Störformen sind in den Abbildungen 4.56 und 4.57 dargestellt.

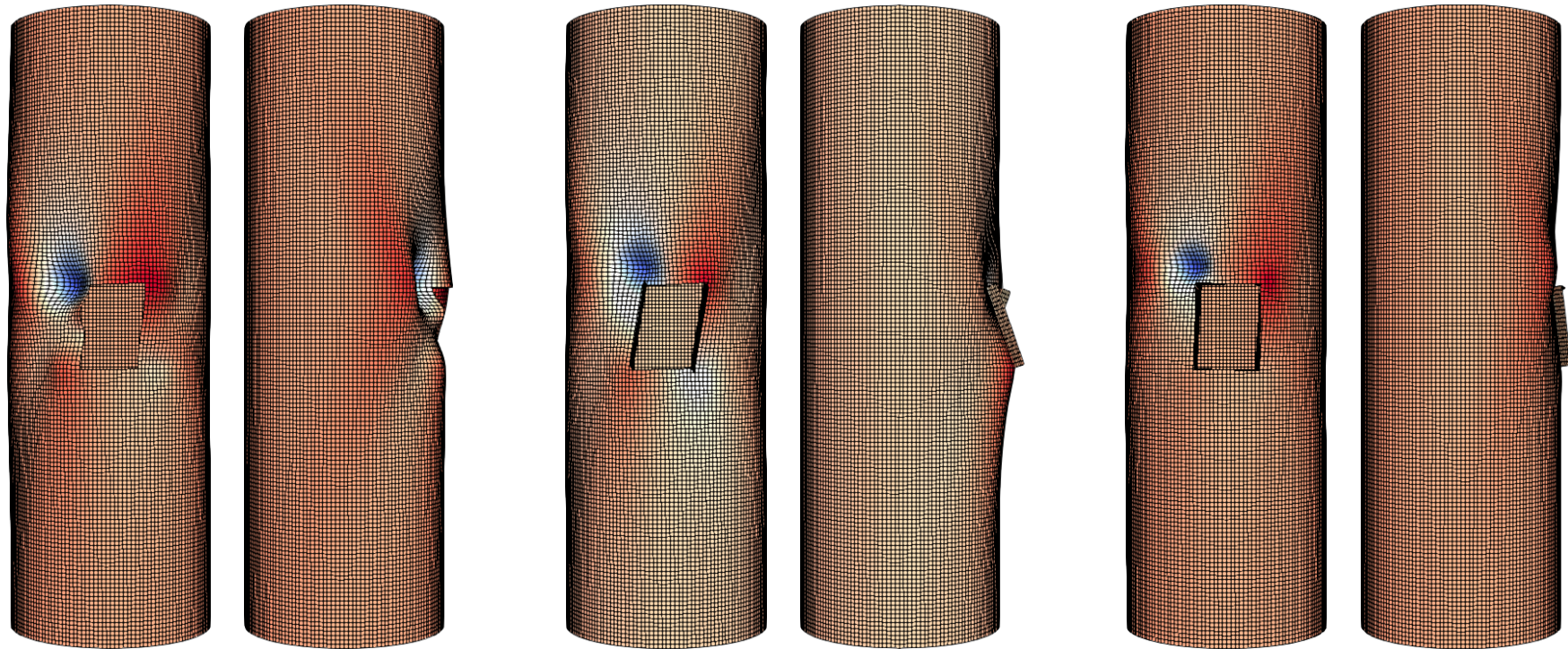


(a) Nicht versteift

(b) Meridianversteift

(c) Umlaufend versteift

Abbildung 4.56: Beulformen



(a) Nicht versteift

(b) Meridianversteift

(c) Umlaufend versteift

Abbildung 4.57: 30-fach überhöhte Störformen bei $\Pi_{st} = 27$ (a), 109 (b) und 108 (c) N mm

4.6.2 Grenzlasten nach DIN EN 1993-1-6 und Störenergiekonzept

Von den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Regelwerken enthält lediglich die DASt-Richtlinie 017 [16] Angaben zu axial gestauchten Zylinderschalen mit Mantelflächenöffnungen. Dabei sind Schalen mit nicht versteiften Öffnungen sowie solche mit Längssteifen, welche die Länge des Öffnungsrandes überschreiten, geregelt. Eine Bemessung der Zylinderschale mit umlaufend randversteifter Mantelflächenöffnung nach aktuell gültiger DIN EN 1993-1-6 [12] kann formal nur mit Hilfe der numerisch gestützten Bemessungskonzepte erfolgen. WIRTH [82] zeigt jedoch durch einen Vergleich mit experimentell ermittelten Beullasten, dass für diese Art der Aussteifung ein sicherer Entwurf mit Hilfe des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises für eine äquivalente nicht geschwächte Schale möglich ist. Dabei ist zu beachten, dass in den Versuchen plastisches Materialverhalten beobachtet wurde und dieses einen erheblichen Einfluss auf das Beulverhalten haben kann.

Nachfolgend wird die in Ringrichtung gemittelte Meridianspannung $\hat{\sigma}^{22}$ für die Beschreibung von Grenzlasten verwendet, da aufgrund der weggeregelten Belastung keine gleichmäßige Krafteinwirkung gegeben ist.

Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis

Die Bemessung auf Grundlage des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises erfordert die Identifikation einer hinsichtlich Stabilitätsversagen maßgebenden Membranspannung, welche auf die Beulspannung eines äquivalenten Vollzylinders zu begrenzen ist. Für öffnungsrandversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung kann bei der Ermittlung der maßgebenden Beulspannung ein Rand mit einer Breite von $2\sqrt{rt}$ um die Öffnung unberücksichtigt bleiben. Dieses Vorgehen ist durch experimentelle Untersuchungen legitimiert und vermeidet, dass durch die an den Öffnungsecken auftretenden Spannungsspitzen ein unwirtschaftlicher Entwurf erfolgt [74]. Da für den vorliegenden Beulfall nur die in Meridianrichtung wirkende Membranspannung beulrelevant ist, wird auf eine Betrachtung der Interaktion verschiedener Spannungen verzichtet.

Eine materiell nichtlineare Berechnung ist nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, sodass von elastischem Beulen ausgegangen wird. Die charakteristische Beulspannung folgt damit direkt durch Abminderung der idealen Beulspannung eines äquivalenten Vollzylinders mit

$$\sigma_{x,Rk} = \alpha_x \cdot \sigma_{x,Rcr} = \alpha_x \cdot 1262,0 \text{ N/mm}^2.$$

In Tabelle 4.16 sind die Beulabminderungsfaktoren α_x sowie die daraus folgenden Grenzspannungen in Abhängigkeit der Herstellqualität Q angegeben. Für die jeweilige Randverschiebung $u_{2,0}$ und die zugehörige Grenzspannung $\hat{\sigma}_{Rk}^{22}$ wird $\sigma_{x,Rk}$ an einer Stelle im Tragwerk erreicht. Die minimale charakteristische Fließspannung $f_{y,min}$ folgt aus dem Bemessungsverfahren unter der Voraussetzung, dass elastisches Beulen maßgebend wird.

Tabelle 4.16: Nachweisformate mit Beulabminderungsfaktor α_x

Q	α_x	spannungsbasiert				LBA
		$\sigma_{x,Rk}$ [N/mm ²]	$f_{yk,min}$ [N/mm ²]	$u_{2,0}$ [mm]	$\hat{\sigma}_{Rk}^{22}$ [N/mm ²]	$\hat{\sigma}_{Rk}^{22}$ [N/mm ²]
16	0,338	426,6	786,0	0,49	335,4	280,3
25	0,419	528,8	823,2	0,61	415,3	347,4
40	0,503	634,8	869,0	0,73	499,1	417,1

Numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis

Das numerisch gestützte MNA/LBA-Nachweisformat orientiert sich am Vorgehen des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises. So erfolgt die Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit ebenfalls über den Beulabminderungsfaktor α_x . Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, dass der ideale Beulwiderstand nicht analytisch, sondern numerisch mit Hilfe einer linearen Beulanalyse ermittelt wird. Wenngleich das Bemessungsverfahren formal auf Referenzwiderständen im Sinne von Lasterhöhungsfaktoren beruht, sind nachfolgend die gemittelten Randmeridianspannungen verwendet, um einen Vergleich der unterschiedlichen Ansätze zu ermöglichen.

Neben einer linearen (LBA) wird zusätzlich eine begleitende, nichtlineare Eigenwertanalyse (NBA) durchgeführt. Diese ist durch das Bemessungsverfahren nicht gefordert, verdeutlicht aber den bereits im Vorbeulbereich vorhandenen Einfluss der geometrischen Nichtlinearität. Infolge der Querschnittsschwächung ist diese stärker ausgeprägt, als bei nicht geschwächten Zylindern. Die ideal-elastischen Beulspannungen befinden sich mit $\hat{\sigma}_{Rcr}^{22} = 829,2 \text{ N/mm}^2$ (LBA) und $\hat{\sigma}_{Rcr}^{22} = 687,5 \text{ N/mm}^2$ (NBA) unterhalb des für den Vollzylinder analytisch ermittelten Wertes. Für die zugehörigen Verschiebungen in Meridianrichtung gilt $u_2 = 1,21 \text{ mm}$ (LBA) und $u_2 = 1,01 \text{ mm}$ (NBA). Da der Beulabminderungsfaktor nicht durch das gewählte Bemessungsverfahren beeinflusst ist, sind mit dem LBA-Format entsprechend geringere Grenzspannungen als für den spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweis ermittelt, s. Tabelle 4.16.

Die zweite Möglichkeit eines numerisch gestützten Beulsicherheitsnachweises ist durch eine geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung unter Berücksichtigung von geometrischen Ersatzimperfektionen (GMNIA) gegeben. Wird elastisches Materialverhalten im Berechnungsmodell angenommen (GNIA), darf die Last, für welche die maximale Vergleichsspannung den Bemessungswert der Streckgrenze erreicht, als unterer Grenzwert für den Beulwiderstand des GMNIA-Formates verwendet werden.

Nachfolgend ist die erste und zweite Beuleigenform sowie eine mit dem Störenergiekonzept ermittelte kritische Störung als Ersatzimperfektionen betrachtet. Unter Annahme der geringsten Herstellqualität folgt die anzusetzende radiale Imperfektionsamplitude zu $\Delta w_{0,eq} = 1,0 \text{ mm}$. Die Berücksichtigung der Imperfektionen erfolgt für alle Fälle durch eine äquivalente Belastung, welche anfänglich und dauerhaft wirkend auf das Tragwerk aufgebracht wird. Dies erfordert eine Normierung der Beulformen auf die gegebene Im-

perfektionsamplitude und eine anschließende Berechnung des zugehörigen Lastvektors. Da sich die erste Beulform für einen linear berechneten Vorbeulzustand nur geringfügig von der ersten Beulform aus einer begleitenden Eigenwertanalyse unterscheidet, ist lediglich letztere untersucht, s. Abbildung 4.53c. Für die in Abbildung 4.58 dargestellten zweiten Beulformen ist hingegen eine unterschiedliche Charakteristik erkennbar, sodass beide Varianten als mögliche Imperfektionsform berücksichtigt sind.

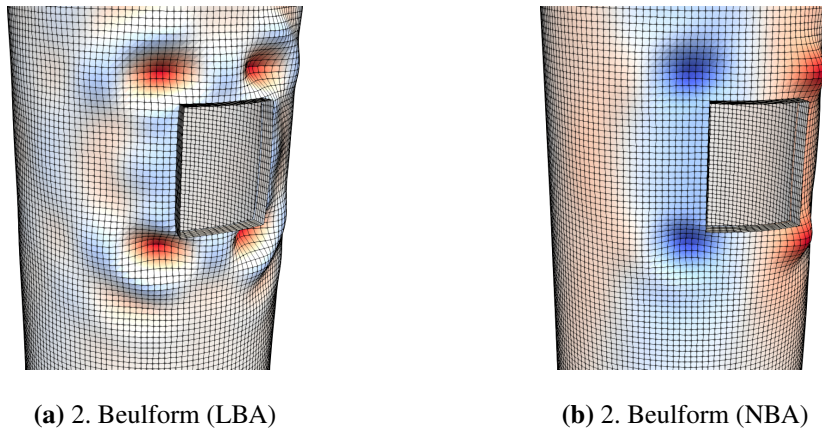


Abbildung 4.58: 2. Beulformen aus linearer (a) und nichtlinearer (b) Beulanalyse

Die kritische Störlast ist nach Gleichung 3.9 bekannt und mit $\Delta \mathbf{p}_{st}$ bezeichnet. Für eine bezogene Randspannung von $\hat{\sigma}^{22} / \hat{\sigma}_{ki}^{22} = 0,85$ beträgt die Amplitude der zugehörigen kritischen Störung $\Delta u_{3,st} = 1,0$ mm. Dabei ist zu berücksichtigen, dass dies einen nichtlinear ermittelten Grundzustand voraussetzt. Wird die Störlast auf das unbelastete Tragwerk aufgebracht, folgt eine maximale radiale Verschiebung von 0,2 mm.

Über eine begleitende Eigenwertanalyse werden Instabilitätspunkte der gestörten Tragwerke ermittelt. Die Auswertung des Kriteriums nach Gleichung 3.1 zeigt, dass für alle beulformaffinen Störungen weiterhin ein Verzweigungsproblem vorliegt. Die Störlast $\Delta \mathbf{p}_{st}$ führt hingegen dazu, dass das Tragwerk bei Überschreiten des Instabilitätspunktes durchschlägt.

Abbildung 4.59 zeigt die Spannungs-Verschiebungs-Kurven der gestörten Tragwerke. Der erkennbare Versatz für die Kurve der zweiten Eigenform aus linearer Beulanalyse ist durch Zugspannungen am Zylinderrand begründet, welche aus anfänglichem Aufbringen der Störung resultieren. Alle Grenzspannungen, die daraus folgenden Beulabminderungsfaktoren sowie die Minimalwerte der Fließspannungen sind in Tabelle 4.17 angegeben. Letztere folgen aus der oben genannten Bedingung für elastisches Beulen auf Grundlage der Vergleichsspannung und verdeutlichen, dass für übliche Stahlsorten mit einem deutlichem Einfluss plastischen Materialverhaltens zu rechnen ist.

Ein Vergleich der Grenzspannungen für die beulformaffinen Imperfektionen verdeutlicht, dass sowohl bei linearer als auch nichtlinearer Beulanalyse die Verwendung der zweiten Beulform zu einer stärkeren Reduktion der idealen Grenzspannung führt. Dabei liegt der Wert für die nichtlineare Berechnung der zweiten Beulform wiederum deutlich unter-

Tabelle 4.17: Nachweisformat mit Ersatzimperfektion

Störung	$\hat{\sigma}_{Rk}^{22}$ [N/mm ²]	u_2 [mm]	$f_{yk,min}$ [N/mm ²]	$\alpha_x = \hat{\sigma}_{Rk}^{22} / \hat{\sigma}_{Rk,unverst.}^{22}$ [-]
ungestört	687,5	1,02	916,9	1
1. Beulf. aus NBA	627,8	1,12	1854,8	0,91
2. Beulf. aus NBA	505,6	0,78	946,5	0,74
2. Beulf. aus LBA	589,7	0,97	1200,5	0,86
Δp_{st}	582,7	0,86	781,8	0,85
$\Pi_{st,max}$	503,7	0,74	659,7	0,73

halb des Wertes für eine lineare Beulanalyse. Dies ist dadurch begründet, dass infolge der Querschnittsschwächung bereits im Vorbeulbereich ein deutlicher Einfluss der geometrischen Nichtlinearität vorhanden ist. Wenngleich die Grenzspannungen für Δp_{st} und für eine Störung auf Grundlage der linearen Beulanalyse ähnlich sind, kann daraus nicht auf eine identische Wirkung der durch die Norm vorgegebenen Imperfektionsamplitude geschlossen werden. Aufgrund der deutlichen Unterschiede in den zugehörigen Störlasten ist von einer zufälligen Übereinstimmung auszugehen.

Insgesamt werden die am gestörten System ermittelten Grenzspannungen durch die auf dem Beulabminderungsfaktor basierenden Bemessungsverfahren deutlich unterschätzt. Dabei ist jedoch zu beachten, dass dieser anhand experimenteller Ergebnisse an nicht geschwächten Zylinder kalibriert ist.

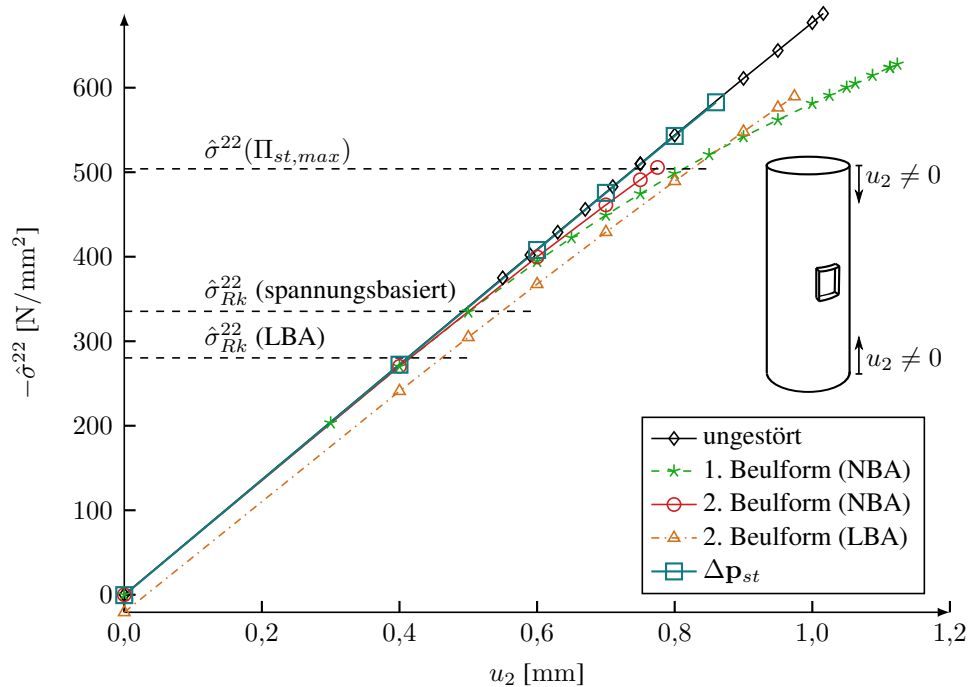


Abbildung 4.59: Spannungs-Verschiebungs-Kurven für beulformaffine und kritische Störungen nach Stör-energiekonzept

Mit $\hat{\sigma}^{22}(\Pi_{st,max})$ ist das Spannungsniveau beschrieben, für welches ein kritischer Zustand bezüglich des Durchschlagens zum nächstgelegenen Nachbeulminimum vorliegt. Für eine weitere Reduktion der Belastung konnte keine kritische Störung ermittelt werden. Aufgrund der in Abbildung 4.54 dargestellten Steigung des Störenergieverlaufs, welche mit abnehmendem Grundlastniveau gegen Null geht, ist davon auszugehen, dass das nächstgelegene Nachbeulminimum durch $\Pi_{st,max} \approx 436 \text{ N mm}$ hinreichend genau erfasst ist. Dies wird durch die starke Zunahme der Imperfektionsamplitude bei Erreichen der minimalen Grenzspannung bestätigt, s. Abbildung 4.60. Die so beschriebene minimale Grenzspannung wird annähernd auch durch die Störung auf Grundlage der nichtlinear ermittelten zweiten Beulform abgebildet. Dies deutet darauf hin, dass mit der zweiten Beulform und der durch die Norm gegebenen Imperfektionsamplitude eine ungünstigste Störung beschrieben ist. Eine vergleichende Berechnung mit verdoppelter Störbelastung führt auf eine höhere Grenzspannung. Aufgrund der großflächig verteilten Störung ist die in das Tragwerk eingebrachte Formänderungsenergie jedoch um ein Vielfaches größer, als für Δp_{st} . Des Weiteren ist bei beulformaffinen Störungen im Allgemeinen nicht bekannt, ob eine untere Grenzspannung identifiziert wurde. An dieser Stelle bietet das Störenergiekonzept mit der Störenergie sowie dem dadurch beschriebenen Nachbeulverhalten die Möglichkeit einer physikalischen Begründung für die angenommene Grenzspannung. Wenngleich nicht zwangsläufig das globale Nachbeulminimum abgebildet wird, ist für eine kritische Störung hinsichtlich des Wechsels in einen anderen instabilen Gleichgewichtspfad eine größere Störenergie zu erwarten.

Das Normkonzept fordert formal die Verwendung einer Ersatzimperfektion, welche den Beulwiderstand so ungünstig wie möglich beeinflusst. Dies ist bei stimulierenden Imperfektionen nicht grundsätzlich für eine maximale Amplitude gegeben. So ist es möglich, dass eine zu groß gewählte Amplitude einen stabilisierenden Einfluss besitzt [52]. Aus diesem Grund wird eine zusätzliche Berechnung mit einer um 10% verringerten Amplitude gefordert. Für den hier betrachteten Fall ergibt sich mit $\hat{\sigma}_{Rk}^{22} = 501,0 \text{ N/mm}^2$ keine wesentliche Änderung der Grenzspannung infolge der reduzierten Störung. Die Unsicherheit bezüglich der anzusetzenden Amplitude ist mit dem Störenergiekonzept dahingehend abgeschwächt, dass die Grenzlaster mit steigender Amplitude der Einzelbeule kontinuierlich abnehmen. Abbildung 4.60 zeigt den entsprechenden Zusammenhang zwischen der maximalen radialen Verschiebung der Störform und dem bezogenen Grundlastniveau.

Soll eine höhere Ausnutzung der Tragfähigkeit, als durch $\Pi_{st,max}$ beschrieben, erzielt werden, ist die Definition eines Beulkriteriums nicht nur auf Grundlage der bezogenen Störenergie, sondern auch durch Vorgabe einer Amplitude denkbar. Ob dieses Vorgehen geeignet ist, um Grenzspannungen für unterschiedliche Schalengeometrien und variierende Materialparameter zu beschreiben und ob ein Zusammenhang zur bezogenen Störenergie hergestellt werden kann, ist noch zu untersuchen. Da die kritische Störung eine Ersatzimperfektion darstellt und im Allgemeinen nicht die tatsächlichen Imperfektionen der realen Struktur abbildet, ist die verwendete Amplitude jedoch nicht durch Messungen zu motivieren. Statt dessen ist eine Kalibrierung des Beulkriteriums an experimentellen Er-

gebnissen erforderlich. Dies stellt gegenüber dem GMNIA-Format keinen wesentlichen Nachteil dar, da die dort angegebenen Amplituden ebenfalls unterschiedliche Einflüsse abdecken müssen und auf Erfahrungswerten basieren [52]. Eine kritische Auseinandersetzung mit den Angaben des Normkonzeptes wird von SCHNEIDER in [54] und [55] vorgenommen.

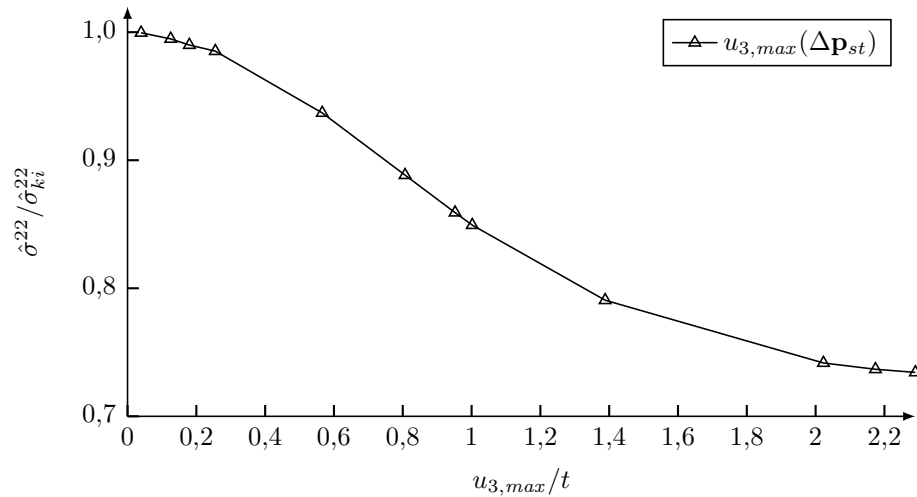


Abbildung 4.60: Entwicklung der radialen Amplitude der Störform

Die Ergebnisse zeigen, dass Störlasten, welche beulformaffine Verformungen hervorru-
fen, nicht zwangsläufig zu einer maximalen Reduktion der Grenzspannung führen. Be-
sonders die Annahme eines linearen Vorbeulzustandes führt für komplexe Geometrien
unter Umständen zu Eigenformen, welche eine unsichere Bemessung begünstigen. Das
Störenergiekonzept ist hingegen geeignet, um eine untere Grenze für die Bemessungslast
zu definieren. Aufgrund des unterschiedlichen Einflusses der Imperfektionsamplitude in
Abhängigkeit der verwendeten Imperfektionsform kann die Kalibrierung der maßgeben-
den kritischen Störung jedoch nicht auf Grundlage der genormten Amplituden erfolgen.
An dieser Stelle sind weitere Untersuchungen erforderlich.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Eine Bewertung des Stabilitätsverhaltens von ausgesteiften Schalentragsystemen kann mit Hilfe des Störenergiekonzeptes erfolgen. Die kritische Störung ist als nicht anfängliche Störung für jeden Grundzustand individuell zu ermitteln und überführt das Tragsystem mit minimalem Energieeintrag in einen indifferenten Gleichgewichtszustand. Mit der zugehörigen Störenergie ist eine skalare Größe für die Beschreibung der Imperfektionsempfindlichkeit verfügbar.

Finite-Elemente-Formulierung

Die vorgestellte gemischt-hybride Finite-Elemente-Formulierung ist aufgrund ausschließlich lokaler Kraftgrößenfreiheitsgrade sowie einer von den Verschiebungen unabhängigen Approximation der Randverdrehungen für eine Modellierung verzweigter Strukturen geeignet. Es ist sowohl die Abbildung von Diskontinuitäten der Kraftgrößen an den Elementübergängen als auch die direkte Assemblierung von Elementen, welche nicht in einer Tangentialebene liegen, ohne Modifikation der Steifigkeitsmatrix realisierbar. Künstliche Freiheitsgrade zur vollständigen Beschreibung eines dreidimensionalen Rotationsvektors sind nicht erforderlich, wenn die Verdrehungen ausschließlich in dafür vorgesehenen Randknoten definiert werden. Des Weiteren besteht nicht die Notwendigkeit mit den Ansatzfunktionen ein C^1 -konformes Verschiebungsfeld zu beschreiben. Aus einer Betrachtung unterschiedlicher Ansatzvarianten geht hervor, dass bereits mit bilinearen Polynomansätzen zur Approximation aller Verschiebungen gute Ergebnisse erzielt werden. Schub- und Membranlocking werden durch die Verwendung abgestimmter Kraftgrößenansätze vermieden. Eine Betrachtung des Elementverhaltens bei verzerrter Elementgeometrie ist nur für ebene Strukturen vorgenommen. Um die Güte der Näherungslösung bei einer Diskretisierung gekrümmter Tragsysteme mit nicht rechtwinkligen Elementen zu bewerten sind weitere Untersuchungen erforderlich.

Die Anwendung des Störenergiekonzeptes setzt eine unabhängige Variation von Weg- und Kraftgrößen im Funktional der zugrunde gelegten Finite-Elemente-Formulierung voraus. Dies ist für die gemischt-hybride Formulierung gegeben, sodass eine Identifikation kritischer Störungen gelingt. Hierfür ist infolge der statischen Kondensation der Kraftgrößen ein quadratisches Eigenwertproblem zu lösen.

Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Zylinderschalen

Ein Vergleich der Imperfektionsempfindlichkeit von unterschiedlichen Zylindergeometrien erfordert eine Normierung der Störenergie, welche für ausgesteifte Zylinder von der Versagensform abhängig ist. Tritt lokales Beulen auf, ist die Biegesteifigkeit der Mantelfläche als Bezugswert geeignet. Für den Fall globaler Beul- und Störformen wird die Vergleichbarkeit durch eine Normierung auf Grundlage der verschmierten Wandstärke si-

chergestellt. Aufgrund der Abhängigkeit der Störenergie von der betrachteten Schale besitzt ein definiertes Beulkriterium nur für den zugrunde gelegten Beulfall Gültigkeit. Die Beschreibung von Grenzlasten unterschiedlicher Beulfälle mit einem Wert der bezogenen Störenergie ist nicht möglich.

Mit der bezogenen Störenergie ist der Einfluss unterschiedlicher Steifengeometrien auf die Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung bewertbar. Fälle in welchen eine ungünstige Wahl der Steifenquerschnitte zwar eine erhöhte Beullast, aber gleichzeitig eine Zunahme der Imperfektionsempfindlichkeit zur Folge haben, sind identifizierbar. Gleiches gilt für Zylinder, bei welchen globales Beulen durch vorausgegangenes lokales Beulen der Steifen initiiert wird und eine Anordnung aussteifender Elemente die Imperfektionsempfindlichkeit gegenüber der nicht versteiften Schale negativ beeinflusst.

Am Beispiel längsversteifter Zylinder mit variierenden Steifenabständen wird gezeigt, dass die von KOITER [34] beschriebene erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit sowie deren schneller Rückgang bei abnehmender Belastung für Schalen mit ausgeprägter Beulforminteraktion abgebildet werden kann. Dabei ist mit dem Störenergiekonzept der wesentliche Einfluss des Grundzustandes auf die kritische Störung berücksichtigt, sodass die Veränderung der Störform von einer lokalen zu einer globalen Verformungscharakteristik erfasst wird. In Abhängigkeit der Schalengeometrie können kritische Störungen jedoch teilweise nur für Grundlastniveaus bestimmt werden, welche sich in unmittelbarer Nähe des ersten Verzweigungspunktes befinden.

Für die Definition von Beulkriterien durch einen Vergleich von Grenzlasten infolge kritischer Störungen mit experimentellen Ergebnissen sind die Geometrieparameter der untersuchten Schalen zu beachten. Aufgrund der Vielzahl von Einflussfaktoren gelingt die Angabe einer unteren Grenzwertkurve für Versuchsergebnisse an axial gestauchten ringversteiften Zylindern nur in Abhängigkeit der Schlankheit und der Aussteifungskennzahlen \bar{A}_{st} und \bar{I}_{st} .

Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit durch die Normung

Die Bemessungsverfahren der untersuchten Normen bieten im Grundsatz zwei Möglichkeiten die Imperfektionsempfindlichkeit von Zylindern unter axialer Druckbeanspruchung im Entwurfsprozess zu berücksichtigen. Die erste besteht darin, eine Abminderung der idealen Beullast σ_{ki} auf Grundlage eines Beulabminderungsfaktors α vorzunehmen. Dieses Vorgehen ist sowohl für eine analytische Berechnung der idealen Beullast im Rahmen eines spannungsbasierten Nachweises, als auch für einen numerisch ermittelten Beulwiderstand möglich. Dabei besteht eine wesentliche Herausforderung darin einen zutreffenden Beulabminderungsfaktor zu bestimmen. Während dieser für ausgewählte Beulfälle mit Hilfe empirischer Gleichungen ermittelt werden kann, ist für die Bemessung nicht explizit genormter Tragwerke eine Rückführung auf bekannte Beulfälle oder die Verwendung experimenteller Ergebnisse erforderlich.

Der Beulabminderungsfaktor α_{glob} ist für global beulende längsversteifte Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung in Abhängigkeit des Aussteifungsgrades zu ermitteln. Dies gilt jedoch nur in einem Übergangsbereich zwischen stark und schwach versteiften Schalen. Bei hohen Aussteifungsgraden mit $\bar{A}_{st} \geq 0,2$ wird der Einfluss der Aussteifung auf die Imperfektionsempfindlichkeit mit einer konstanten Abminderung der idealen Beulast ohne genauere Berücksichtigung der Schalengeometrie erfasst. Die durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass das Störenergiekonzept die Möglichkeit bietet eine Modifikation des Beulabminderungsfaktors unter Berücksichtigung des tatsächlichen Tragverhaltens zu begründen. Das durch die Vereinfachungen des Normverfahrens erforderliche hohe Sicherheitsniveau kann damit zugunsten eines wirtschaftlicheren Tragwerksentwurf reduziert werden.

Die zweite Variante zur Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit ist mit einer direkten Berechnung des charakteristischen Beulwiderstandes unter Verwendung geometrischer Ersatzimperfektionen gegeben. Am Beispiel einer Zylinderschale mit umlaufend randversteifter Mantelflächenöffnung erfolgt die Bewertung von unterschiedlichen eigenformaffinen Ersatzimperfektionen nach DIN EN 1993-1-6 [12] sowie einer kritischen Störung im Sinne des Störenergiekonzeptes.

Die Verwendung beulformaffiner Störungen führt nicht zwangsläufig auf eine minimale Grenzlast, welche durch den ersten Verzweigungspunkt des imperfekten Systems beschrieben ist. Das Störenergiekonzept ist mit der Abbildung des nächstgelegenen Nachbeulminimums hingegen dazu geeignet einen unteren Grenzwert für die maximale Belastung des imperfekten Tragwerkes zu definieren. Des Weiteren ist das Tragverhalten aufgrund der Mantelflächenöffnung bereits im Vorbeulbereich deutlich durch geometrisch nichtlineare Anteile beeinflusst. Werden die Beulformen gemäß dem Nachweisverfahren unter Annahme geometrisch linearen Tragverhaltens ermittelt, führt dies im vorliegenden Fall zu einer unsicheren Bemessung. Alternativ zu den numerisch gestützten Nachweisformaten ist die Anwendung des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises mit der vereinfachten Betrachtung einer maßgebenden Meridianspannung möglich. Dies hat einen sicheren, wenngleich unwirtschaftlicheren Entwurf zur Folge.

Ausblick

Bei ausgesteiften Schalen ist es möglich, dass nach lokalem Beulen der Mantelfläche überkritisches Tragverhalten auftritt. In diesen Fällen wird nach einem geringen Lastabfall wieder ein stabiler Gleichgewichtszustand erreicht, welcher eine weitere Laststeigerung zulässt. Dabei ist eine Imperfektionsempfindlichkeit hinsichtlich globalem Beulen weiterhin gegeben. Im Rahmen der durchgeführten Berechnungen wurden keine kritischen Störungen für Schalen im Bereich überkritischen Tragverhaltens ermittelt. An dieser Stelle sind weitere Untersuchungen sinnvoll, da lokales Beulen von ausgesteiften Strukturen in der Ingenieurpraxis teilweise planmäßig zugelassen wird und der Versagensfall erst bei globalem Beulen eintritt.

Das Stabilitätsverhalten von Schalentragsystemen kann infolge einer materiellen Nichtlinearität maßgeblich beeinflusst sein [53]. Eine Anwendung des Störenergiekonzeptes unter Berücksichtigung plastischen Materialverhaltens ist in [61], [31] und [46] gezeigt. Um die vorgestellten Normkonzepte vollständig zu bewerten, ist die Berücksichtigung von Plastizität beim Beulen aussteifelter Schalen in folgenden Forschungsarbeiten unerlässlich. Darüber hinaus ist ein Vergleich mit Grenzlasten möglich, welche mit unterschiedlichen Störverfahren auf Grundlage realer oder stimulierender Ersatzimperfectionen ermittelt werden.

Ein weiteres mögliches Anwendungsfeld ergibt sich aus der Verwendung der Störenergie als Entwurfsparameter im Rahmen von Topologieoptimierungen. So ist eine Optimierung der Steifengeometrie oder -anordnung unter Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit denkbar.

Literatur

- [1] Afolabi, D: Linearization of the quadratic eigenvalue problem. *Computers & Structures*, 26(6), 1039–1040, 1987.
- [2] Ahrens, H.; Dinkler, D.: *Finite-Element-Methoden Teil II*. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 1996.
- [3] Barlag, S.: *Zur Modellbildung für numerische Stabilitätsuntersuchungen elastoplastisch versagender Kreiszylinder aus Stahl*. Dissertation, Universität Hannover, 2003.
- [4] Başar, Y.; Krätzig, W. B.: *Mechanik der Flächentragwerke: Theorie, Berechnungsmethoden, Anwendungsbeispiele*. Vieweg & Sohn, 1985.
- [5] Başar, Y.; Krätzig, W. B.: *Theory of shell structures*. VDI-Verlag, 2000.
- [6] Bischoff, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [7] Block, D. L.; Card, M. F.; Mikulas Jr, M. M.: Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. Technical report TN D-2960, National Aeronautics and Space Administration, 1965.
- [8] Byskov, E.; Hutchinson, W.: Mode Interaction in Axially Stiffened Cylindrical Shells. *AIAA Journal*, 15(7), 941–948, 1977.
- [9] Card, M. F.; Jones, R. M.: Experimental and Theoretical Results for Buckling of Eccentrically Stiffened Cylinders. Technical report TN D-3639, National Aeronautics and Space Administration, 1966.
- [10] Cho, M.; Roh, H. Y.: Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(1), 81–115, 2003.
- [11] DIN 18800-4:2008-11: *Stahlbauten - Teil 4: Stabilitätsfälle - Schalenbeulen*. Deutsches Institut für Normung, 2008.
- [12] DIN EN 1993-1-6:2017-07: *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Teil 1-6: Festigkeit und Stabilität von Schalen*. Deutsches Institut für Normung, Juli 2017.
- [13] Dinkler, D.: Phenomena in nonlinear dynamic buckling behaviour of elastic structures. In *33rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2399–2406, 1992.
- [14] Dinkler, D.: *Unveröffentlichtes Manuskript zum Fachgebiet Schalentheorie*. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2019.
- [15] Dinkler, D; Schäfer, U.: Limit Loads for Cylindrical Shells under Combined Actions. In *Proceedings of the International Conference on Carrying Capacity of Steel Shell Structures*, Brno, 112–118, 1997.

- [16] E-DAST-Richtlinie 017: *Beulsicherheitsnachweis für Schalen-spezielle Fälle*. Deutscher Ausschuss für Stahlbau, Köln, 1992.
- [17] ECCS: *Buckling of Steel Shells - European Design Recommendations*. European Convention for Constructional Steelwork, 4th edition, 1988.
- [18] ECCS: *Buckling of Steel Shells - European Design Recommendations*. European Convention for Constructional Steelwork, 5th edition, 2013.
- [19] Fröier, M.; Nilsson, L.; Samuelsson, A.: The rectangular plane stress element by Turner, Pian and Wilson. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(2), 433–437, 1974.
- [20] Harbord, R.: *Berechnung von Schalen mit endlichen Verschiebungen - Gemischte finite Elemente*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1973.
- [21] Harbord, R.: *Berechnung dünner Schalentragwerke mit finiten Elementen - Vergleichende Untersuchung unterschiedlicher Diskretisierungsvarianten*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1977.
- [22] Hillmann, J.: *Grenzlasten und Tragverhalten axial gestauchter Kreiszylinderschalen im Vor- und Nachbeulbereich*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1985.
- [23] Hutchinson, J. W.; Amazigo, J. C.: Imperfection-Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells. *AIAA Journal*, 5(3), 392–401, 1967.
- [24] Hübner, B.: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2003.
- [25] Irons, B. M.: The semi-Loof shell element In *Finite elements for thin shells and curved members*. (Ashwell, D. G.; Gallagher, R. H., Eds.). John Wiley & Sons, Ltd, 197–222, 1976.
- [26] Jäger-Cañás, A.; Pasternak, H.: Influence of closely spaced ring-stiffeners on the axial buckling behavior of cylindrical shells. In *Special Issue: Proceedings of Eurosteel 2017*, 1, Nr. 2-3. ce/papers, 928–937, 2017.
- [27] Jäger-Cañás, A.; Pasternak, H.: On the buckling behaviour of ring-stiffened shells under axial compression. In *Eighth International Conference on Thin-Walled Structures*, 2018.
- [28] Kaldenhoff, M.; Ruckenbrod, C.: Silos und Einwirkungen auf Silos nach DIN EN 1993-4-1. *Stahlbau-Kalender*, 459–522, 2013.
- [29] Kindmann, R.; Laumann, J.: Ermittlung von Eigenwerten und Eigenformen für Stäbe und Stabwerke. *Stahlbau*, 73(1), 26–36, 2004.
- [30] Klingbeil, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.

- [31] Knoke, O.: *Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2003.
- [32] Koiter, W. T.: Buckling and post-buckling behaviour of a cylindrical panel under axial compression. Technical report NLL-TR S.476, National Aerospace Laboratory NLR, 1956.
- [33] Koiter, W. T.: The stability of elastic equilibrium. Technical report, Stanford University Department of Aeronautics and Astronautics, 1970.
- [34] Koiter, W. T.: A general theory of interaction between local (panel) buckling and overall (euler) buckling of elastic stiffened plate and shell structures. In *Final Report of the Second International Colloquium on Stability of Steel Structures*. European Convention for Constructional Steelwork, 253–254, 1977.
- [35] Koschnick, F.: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Dissertation, Technische Universität München, 2004.
- [36] Krätzig, W. B.; Başar, Y.: *Tragwerke 3*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [37] Kriegesmann, B.; Rolfes, R.; Hühne, C.; Teßmer, J.; Arbocz, J.: Probabilistic design of axially compressed composite cylinders with geometric and loading imperfections. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 10(04), 623–644, 2010.
- [38] Lehoucq, R. B.; Sorensen, D. C.; Yang, C.: *ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. SIAM, 1998.
- [39] Love, A. E. H.: The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 179, 491–546, 1888.
- [40] Macneal, R. H.; Harder, R. L.: A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in analysis and design*, 1(1), 3–20, 1985.
- [41] Pian, T. H. H.; Sumihara, K.: Rational Approach For Assumed Stress Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9), 1685–1695, 1984.
- [42] Pian, T. H. H.; Tong, P.: Basis of finite element methods for solid continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(1), 3–28, 1969.
- [43] Pian, T. H. H.; Wu, C.-C.: A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(10), 2331–2343, 1988.
- [44] Pian, T.H.H; Kang, D.; Wang, C.: Hybrid plate elements based on balanced stresses and displacements. *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, 1, 244–265, 1986.

- [45] Pin, T. ; Pian, T. H. H.: A variational principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 5(5), 463–472, 1969.
- [46] Pontow, J.: *Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlasten von Schalentragsystemen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2009.
- [47] Reinstädler, S.: *Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2015.
- [48] Reissner, E.: A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells. *American Journal of Mathematics*, 63(1), 177–184, 1941.
- [49] Samuelson, L.; Vandepitte, D.; Paridaens, R.: The Background to the ECCS Recommendations for Buckling of Stringer Stiffened Cylinders. In *Stability of Plate and Shell Structures*. (Dubas, P.; Vandepitte, D., Eds.). Rijksuniversiteit Gent, 513 – 522, 1987.
- [50] Schardt, R.: *Verallgemeinerte technische Biegetheorie: lineare probleme*. Springer-Verlag, 2013.
- [51] Schmidt, H.: Stability of steel shell structures: General Report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55(1-3), 159–181, 2000.
- [52] Schmidt, H.: Stabilität stählerner Schalentragsysteme. *Stahlbau-Kalender*, 529–612, 2009.
- [53] Schneider, W.: Die „ungünstigste“ Imperfektionsform bei stählernen Schalentragsystemen - eine Fiktion? *Bauingenieur*, 10, 436–442, 2004.
- [54] Schneider, W.: Konsistente geometrische Ersatzimperfektionen für den numerisch gestützten Beulsicherheitsnachweis axial gedrückter Schalen. *Stahlbau*, 73(4), 262–269, 2004.
- [55] Schneider, W.: Ersatzimperfektionen für den numerischen Beulsicherheitsnachweis stählerner Schalentragsysteme – State of the Art. *Stahlbau*, 75(9), 754–760, 2006.
- [56] Schneider, W.; Timmel, I.; Höhn, K.: The conception of quasi-collapse-affine imperfections: A new approach to unfavourable imperfections of thin-walled shell structures. *Thin-walled structures*, 43(8), 1202–1224, 2005.
- [57] Schwarz, H.-R.; Köckler, N.: *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, 2013.
- [58] Singer, J.: Vibrations and buckling of imperfect stiffened shells - recent developments. *Collapse: The buckling of structures in theory and practice*, 443–479, 1983.
- [59] Singer, J.; Arbocz, J.; Weller, T.: *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures*, Vol. 2. John Wiley & Sons, Ltd, 2002.

- [60] Singer, J.; Baruch, M.; Harari, O.: On the stability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression. *International Journal of Solids and Structures*, 3(4), 445–470, 1967.
- [61] Spohr, I.: *Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Schalen*. Dissertation, Institut für Statik, University Braunschweig. In German, 1998.
- [62] Sze, K. Y.: *Development of efficient and robust hybrid/mixed elements for solid structures*. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of Hong Kong, 1990.
- [63] Sze, K. Y.: Minimal assumed moments and optimal local coordinates for plate elements based upon the complementary energy functional. *Computational mechanics*, 14(6), 586–595, 1994.
- [64] Sze, K. Y.: Simple semi-loof element for analyzing folded-plate structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(1), 120–134, 1994.
- [65] Sze, K. Y.: On immunizing five-beta hybrid-stress element models from ‘trapezoidal locking’ in practical analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(4), 907–920, 2000.
- [66] Sze, K. Y.; Chan, W. K.; Pian, T. H. H.: An eight-node hybrid-stress solid-shell element for geometric non-linear analysis of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(7), 853–878, 2002.
- [67] Sze, K. Y.; Chow, C. L.: An efficient hybrid quadrilateral Kirchhoff plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1), 149–169, 1991.
- [68] Thompson, J. M. T.: A general theory for the equilibrium and stability of discrete conservative systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 20(6), 797–846, 1969.
- [69] Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of plates and shells*. McGraw-hill, 2nd edition, 1959.
- [70] Timoshenko, S. P.: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 58(4), 337–385, 1910.
- [71] Tong, P.: A family of hybrid plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(10), 1455–1468, 1982.
- [72] Tranel, G.: *Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1994.
- [73] Tvergaard, V.: Influence of post-buckling behaviour on optimum design of stiffened panels. *International Journal of Solids and Structures*, 9(12), 1519–1533, 1973.

- [74] Velickov, Dejan: *Stabilität stählerner Kreiszylinderschalen mit unversteiften und umlaufend randversteiften Mantelöffnungen unter Axialdruck*. Cuvillier, 2000.
- [75] Von Karman, T.: The strength of thin plates in compression. *Trans. ASME*, 54, 53–57, 1932.
- [76] Wagenhuber, W.: *Imperfektionssensitivität und rechnerischer Nachweis der Beulsicherheit dünner Schalen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1989.
- [77] Wagner, H. N. R.; Hühne, C.; Niemann, S.; Khakimova, R.: Robust design criterion for axially loaded cylindrical shells - Simulation and Validation. *Thin-Walled Structures*, 115, 154–162, 2017.
- [78] Wagner, H. N. R.; Hühne, C.; Rohwer, K.; Niemann, S.; Wiedemann, M.: Stimulating the realistic worst case buckling scenario of axially compressed unstiffened cylindrical composite shells. *Composite Structures*, 160, 1095–1104, 2017.
- [79] Walker, A. C.: A non-linear finite element analysis of shallow circular arches. *International Journal of Solids and Structures*, 5(2), 97–107, 1969.
- [80] Walker, A. C.; Sridharan, S.: Analysis of the Behaviour of Axially Compressed Stringer-Stiffened Cylindrical Shells. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 69(2), 447–472, 1980.
- [81] Washizu, K.: *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, 3. edition, 1982.
- [82] Wirth, S.: *Beulsicherheitsnachweise für schalenförmige Bauteile nach EN 1993-1-6*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen, 2008.
- [83] Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, 2013.
- [84] Yuan, K.-Y.; Huang, Y.-S.; Pian, T. H. H.: New strategy for assumed stresses for 4-node hybrid stress membrane element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(10), 1747–1763, 1993.
- [85] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, 7th edition, 2013.

Berichte aus dem Institut für Statik seit 2003

- Nr. 2003-96 B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen
- Nr. 2003-97 J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme
- Nr. 2003-98 O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen
- Nr. 2005-99 A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen
- Nr. 2006-100 D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
- Nr. 2006-101 A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
- Nr. 2006-102 M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
- Nr. 2006-103 L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
- Nr. 2006-104 T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
- Nr. 2007-105 C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
- Nr. 2007-106 V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2007-107 J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragsystemen
- Nr. 2009-108 M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
- Nr. 2010-109 P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
- Nr. 2010-110 J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
- Nr. 2010-111 K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
- Nr. 2011-112 S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2011-113 L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse
- Nr. 2012-114 B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten
- Nr. 2012-115 J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Deponiestrukturen

- Nr. 2015-116 F. PASENOW: Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien
- Nr. 2015-117 M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich
- Nr. 2016-118 A. ALFARRA: Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen
- Nr. 2016-119 S. REINSTÄDLER: Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos
- Nr. 2016-120 F. CRAMER: Mehrfeld-Modell für chemisch-physikalische Alterungsprozesse von Beton
- Nr. 2018-121 T. BLUME: Mikromechanisch begründete Modellbildung des thermomechanischen Werkstoffverhaltens von Asphalt
- Nr. 2018-122 F. OCKELMANN: Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode
- Nr. 2019-123 A. GAFOOR: Modeling and numerical analysis of damage behavior of concrete
- Nr. 2019-124 H.-H. HERMERSCHMIDT: Entwicklung eines Berechnungsmodells zur Untersuchung der Strömungsvorgänge an Überfallschütz und drehendem Schaufelwasserrad
- Nr. 2019-125 C. FLACK: Mehrfeldmodellierung von Beton mit diskreten Element Methoden
- Nr. 2020-126 S. KERN: Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Schalenträgerwerke

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.

Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig

Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland

Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116

E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <https://www.tu-braunschweig.de/statik>